Un nouveau mécanisme décentralisant les équilibres de Lindahl

29 mai 2007
Version préliminaire

Sébastien Rouillon[1]

Mots clés : Bien public ; Equilibre de Lindahl ; Mécanisme économique.
Classification JEL : D70 ; H41.

Résumé : Cet article présente un nouveau mécanisme économique, tel que le jeu associé décentralise les équilibres de Lindahl en équilibre de Nash. Chaque joueur transmet un message de dimension 2, exprimant par là sa propension marginale à payer et sa demande de bien public. A l'équilibre de Nash, les messages des joueurs révèlent directement et honnêtement des données définissant un équilibre de Lindahl et le mécanisme décentralise l'allocation économique correspondante. Dans le cas d'une économie quasi-linéaire, en modélisant le comportement hors équilibre des joueurs comme un processus du gradient, l'unique point stationnaire de ce processus est un équilibre de Nash du jeu et on montre qu'il est globalement stable.

Summary: This paper presents a new economic mechanism, such that the associated game form implements Lindahl equilibria as Nash equilibria. Each player sends a 2-dimensional message, in order to tell his marginal propensity to pay and his demand for the public good. At a Nash equilibrium, the players directly and honestly reveal data defining a Lindahl equilibrium and the mechanism implements the corresponding allocation. In a quasi-linear economy, formalizing out-of-equilibrium behaviours of the players as a gradient process, the unique stationary point of this process is a Nash equilibrium of the game and it is shown to be globally stable.

1. Introduction.

Dans un article classique, Lindahl (1919) décrit un mécanisme économique, ayant pour but de déterminer simultanément l'offre de bien public et la répartition des impôts pour la financer ([2]). Il consiste à attribuer à chaque consommateur une part fiscale, puis à lui demander, sachant sa contribution, quelle quantité il désire. Lindahl postule que, dans ces circonstances, les consommateurs demanderont la quantité qui maximise leur utilité, sachant ce qu'ils doivent contribuer au financement. Il définit alors un équilibre comme une suite de parts fiscales, dont la somme soit égale à 1 (pour obtenir un équilibre budgétaire), telle que tous les consommateurs demandent la même quantité de bien public. Il envisage aussi la question de la décentralisation d'un tel équilibre, conçue comme une négociation entre les consommateurs, dont l'objet est d'ajuster les prix personnalisés.

L'équilibre de Lindahl a le mérite, d'un point de vue normatif, de rétablir, pour une économie comportant un bien public, les deux théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être, établissant une correspondance entre les équilibres de marché et les états optimaux.

Malheureusement, comme Samuelson (1966) le montre, sous l'hypothèse de rationalité, l'équilibre de Lindahl n'a pas d'intérêt pratique. Ceci tient au fait que Lindahl ne définit pas de véritables courbes de demande et qu'un consommateur rationnel aurait en fait intérêt à se

([1]) Laboratoire Gretha, Université de Bordeaux 4, Avenue Léon Duguit, 33608 Pessac Cedex (France), Tél. : (+033) (0) 5.56.84.25.85, e-mail : rouillon@u-bordeaux4.fr, site : http://perso.orange.fr/sebastien.rouillon.
([2]) On se base ici sur la présentation de Johansen (1963).

comporter en passager clandestin. Par souci de clarté, Samuelson (1966) requalifie donc la solution de Lindahl de *pseudo*-équilibre, marquant ainsi sa vulnérabilité vis-à-vis des manipulations stratégiques.

Une vaste littérature a fait suite à cette objection, le but étant de spécifier des mécanismes économiques qui, tout en prenant au sérieux le problème du passager clandestin, soient capables de décentraliser les équilibres de Lindahl. Tel est le résultat auxquels Hurwicz (1979), Walker (1981) et Kim (1993) sont parvenus, en retenant comme concept de solution l'équilibre de Nash.

Cet article prolonge cette recherche. A l'instar de Hurwicz (1979), Walker (1981) et Kim (1993), nous proposons aussi un mécanisme économique décentralisant les équilibres de Lindahl en équilibre de Nash.

Ce mécanisme tire son originalité du fait qu'il admet une interprétation proche de Lindahl (1919). Chaque joueur transmet un message de dimension 2. Il est censé exprimer par là sa propension à payer et sa demande de bien public. A l'équilibre de Nash, les joueurs révèlent directement et honnêtement les informations caractéristiques d'un équilibre de Lindahl et le mécanisme décentralise l'allocation économique associée (Théorème 1). Réciproquement, un équilibre de Lindahl donné est décentralisable en équilibre de Nash, la stratégie d'équilibre consistant pour chaque joueur à annoncer le prix personnalisé et la demande de bien public correspondants (Théorème 2).

Le fait de recourir à l'équilibre de Nash pour modéliser le comportement des joueurs a fait l'objet de critiques. La plupart du temps, les joueurs ne disposent pas, en effet, des données nécessaires à son calcul. Hurwicz (1972) amoindrit la portée de cette critique, en rappelant qu'un équilibre de Nash peut aussi advenir comme résultat d'un processus de tâtonnement. Selon ce point de vue, la pertinence de l'équilibre de Nash devient synonyme de stabilité de l'équilibre de Nash, selon différentes formalisations des comportements hors-équilibre des joueurs. En suivant l'exemple de Kim (1993), nous modélisons ici les ajustements hors-équilibre comme un processus du gradient. Nous montrons, pour le cas d'une économie quasi-linéaire, que l'équilibre de Nash du jeu associé à notre mécanisme est l'unique point stationnaire de ce processus et est globalement stable (Théorème 3).

Le papier est organisé comme suit. La section 2 pose le modèle économique considéré (on se limite aux économies comportant un bien privé et un bien public, et utilisant le premier comme intrant pour produire le second, selon une technologie à rendements constants). La section 3 définit l'équilibre de Lindahl, énonce le problème du passager clandestin et discute quelques mécanismes économiques représentatifs, décentralisant les équilibres de Lindahl en équilibre de Nash. La section 4 explicite le nouveau mécanisme économique proposé et énonce ses propriétés. La section 5 traite la question de la stabilité.

2. Modélisation de l'économie.

On considère ci-dessous des économies où il y a un bien privé x et un bien public y, n consommateurs, indicés i, et un producteur. Chaque consommateur est caractérisé par son ensemble de consommation X_i, sa relation de préférence $\boldsymbol{R_i}$, définie sur X_i, et sa dotation initiale w_i en bien privé (par hypothèse, il n'a aucune dotation en bien public). Les préférences sont supposées complètes, strictement croissantes dans le bien privé et transitives. Le producteur utilise le bien privé comme input, pour produire le bien public. Il est caractérisé par son ensemble technologique Y. Sa technologie est supposée à rendements d'échelle constants. Sans perte de généralité, on normalise la technologie de telle façon qu'une unité du bien public coûte une unité de bien privé.

On notera E l'ensemble des économies de ce type, dont un élément e s'écrit :

$$e = (\{x, y\}, \{1, \dots, n\}, (X_i, \boldsymbol{R_i}, w_i)_{i=1}^{n}, Y = \{(x, y) ; x + y \leq \Sigma_{i=1}^{n} w_i\}).$$

Note 1 : Par la suite, le producteur ne jouera aucun rôle. Par hypothèse, il offrira toute quantité de bien public demandée, à un prix égal à 1. On peut justifier ceci, en admettant qu'il existe grand nombre de producteurs identiques, offrant le bien public sur un marché concurrentiel.

Allocations économiques. Pour n'importe quelle économie e prise dans E, une allocation est un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$, noté $((x_i)_{i=1}^{n}, y)$, spécifiant les consommations de bien privé et de bien public par chaque consommateur (par définition, elles sont identiques dans le cas du bien public).

Pour une économie e donnée, une allocation est dite possible si elle vérifie : $(x_i, y) \in X_i$, pour tout i, et $\Sigma_{i=1}^{n} x_i + y = \Sigma_{i=1}^{n} w_i$.

Mécanismes économiques. La réalisation d'une allocation résulte des institutions dont on munit l'économie et des décisions des agents au sein de ces dernières. La définition suivante pose ce principe de façon générale.

On définit un mécanisme économique $D = (M, \rho)$, en dotant chaque consommateur i d'un ensemble M_i, dont les éléments m_i sont appelés des messages, puis en spécifiant une fonction de résultat ρ, associant à tout message joint $m = (m_i)_{i=1}^{n}$ de l'espace des messages $M := \times_{i=1}^{n} M_i$, une allocation $\rho(m)$ de l'économie ([3]).

Note 2 : Une définition plus générale est possible. Elle consiste à admettre l'existence d'un $(n+1)$-ième agent, appelé le commissaire-priseur, lui aussi doté d'un ensemble de messages M_{n+1}, puis à poser $M := \times_{i=1}^{n+1} M_i$. L'allocation $\rho(m)$, dépendant aussi du message du commissaire-priseur, échappe alors partiellement au contrôle des consommateurs.

Equilibre économique. Un mécanisme D définit implicitement un jeu, où les joueurs sont les consommateurs $i = 1, \ldots, n$, les stratégies de i sont les éléments de M_i et ses préférences sur l'espace des messages M, notées $\boldsymbol{R_i^*}$, découle de la fonction de résultat ρ et de ses préférences $\boldsymbol{R_i}$ sur X_i ([4]).

Sous des hypothèses de rationalité parfaite et d'information parfaite (en l'occurrence, sur D et e), la théorie des jeux retient l'équilibre de Nash comme concept de solution. Un équilibre de Nash du jeu associé à D est un profil stratégique m^* tel que, pour tout i, on ait :

$$m^* \boldsymbol{R_i^*} (m^*/m_i), \text{ pour tout } m_i \in M_i,$$

où l'on note : $(m^*/m_i) = (m_1^*, \ldots, m_i, \ldots, m_n^*)$.

3. Mécanismes de Lindahl.

Lindahl (1919) pose le problème de la détermination simultanée de l'offre de bien public et de la répartition des impôts pour la financer. Il y apporte une réponse, sous la forme du mécanisme économique suivant. Il propose d'attribuer à chaque consommateur une part fiscale, puis de lui demander quelle quantité il désire, sachant sa participation au financement. Il admet comme postulat que les consommateurs demanderont la quantité qui maximise leur utilité, en prenant leur part fiscale pour donnée. Il définit enfin un équilibre comme une suite de parts fiscales, dont la somme soit égale à 1 (pour obtenir un équilibre budgétaire), telle que tous les consommateurs demandent la même quantité de bien public.

([3]) En général, l'allocation associée à m par D dépend des caractéristiques de l'économie e, notamment des dotations initiales w_i. Il serait donc préférable de la noter $\rho(m, e)$. Pour simplifier, nous n'introduisons pas cette notation par la suite.

([4]) Formellement, pour deux messages m et m' quelconques, les préférences sur M sont définies par : $m' \boldsymbol{R_i^*} m \Leftrightarrow \rho(m') \boldsymbol{R_i} \rho(m)$.

Equilibre de Lindahl. Le mécanisme économique conçu par Lindahl s'apparente formellement à un système de marchés. Pour le voir, il suffit d'assimiler les parts fiscales à des prix personnalisés, puis d'imaginer qu'il y a autant de marchés personnalisés du bien public que de consommateurs et que la technologie de l'entreprise est telle qu'elle doit offrir la même quantité sur tous les marchés simultanément (Johansen, 1963). Dans ces conditions, le problème de Lindahl revient formellement à déterminer un équilibre général de ces marchés (Foley, 1970).

Par la suite, en privilégiant cette lecture, on notera p_i, le prix personnalisé de i, et y_i, sa demande de bien public. La définition d'un équilibre de Lindahl sera alors la suivante.

Des prix personnalisés $(p_i^*)_{i=1}^{n}$ (vérifiant $\Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1$, par définition) et une allocation possible $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$ forment un équilibre de Lindahl si, pour tout i : (x_i^*, y^*) $\boldsymbol{R_i}$ (x_i, y), pour tout $(x_i, y) \in X_i$ tel que $x_i + p_i^* y \leq w_i$. L'allocation $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$ est alors appelée allocation de Lindahl.

Le problème du passager clandestin. A notre connaissance, Samuelson (1966) a été le premier à noter que, s'il se veut être un concept servant à prédire le comportement des agents, l'équilibre de Lindahl (1919) est en fait irrecevable. Pour cette raison, il le qualifie de *pseudo*-équilibre. Son défaut vient du fait que, dans le cadre institutionnel proposé, des agents rationnels seront tentés, tôt ou tard, de se comporter en passagers clandestins. D'une part, ils ne tarderont pas à comprendre que, l'offre de biens publics dépendant pour une part des demandes des autres, ils tireront avantage à sous-évaluer leur propre demande, pour payer moins. D'autre part, sachant qu'ils fixent seuls la demande sur leur marché personnalisé, ils n'auront aucune raison de considérer leur prix personnalisé comme donné.

Cette critique a suscité une vaste littérature, se fixant pour but d'inventer d'autres institutions, capables de décentraliser les équilibres de Lindahl, sans négliger les incitations des agents économiques à se comporter en passagers clandestins. Hurwicz (1979), Walker (1981) et Kim (1993) sont parvenus à un tel résultat, en utilisant l'équilibre de Nash comme concept de solution. Sans rentrer dans les détails (Cf. les annexes, pour trouver les énoncés précis), ils spécifient des mécanismes économiques, où la fonction de résultat a pour forme :

$$\rho(m) = ((w_i - p_i(m)\, y(m) - r_i(m))_{i=1}^{n}, y(m)), \tag{1}$$

puis ils démontrent la propriété suivante :

Si m^* est un équilibre de Nash du jeu associé, alors les prix personnalisés $(p_i(m^*))_{i=1}^{n}$ et l'allocation $\rho(m^*)$ forment un équilibre de Lindahl (donc, $r_i(m^*) = 0$, pour tout i).

4. Un nouveau mécanisme.

On définit ici un mécanisme tel qu'à l'équilibre de Nash, les joueurs révèlent directement des données économiques caractérisant un équilibre de Lindahl et la fonction de résultat décentralise l'allocation de Lindahl associée.

Définition 1 : Soit le mécanisme $D = (\mathbb{R}^{2n}, \rho)$, tel que :

- un message d'un joueur i se note $m_i = (p_i, y_i)$ et appartient à $\mathbb{R}^2$;
- pour tout m de $\mathbb{R}^{2n}$, la fonction de résultat s'écrit :

$$\rho(m) = ((w_i - p_i(m)\, y(m) - (1/2)\, f_i(m)^2)_{i=1}^{n}, y(m)),$$

et est définie par :

$$\begin{aligned} p_i(m) &= 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j, \\ y(m) &= (1/n)\, \Sigma_{i=1}^{n}\, y_i, \\ f_i(m) &= \Sigma_{i=1}^{n}\, p_i - 1 + \Sigma_{j\neq i}\, y_j/(n-1) - y_i. \end{aligned}$$

Dans ce mécanisme, pour tout i, les stratégies p_i et y_i s'interprètent *a priori* comme l'annonce par i, respectivement, de sa propension marginale à payer pour le bien public et de sa demande de bien public (cette interprétation justifie le choix des notations). Chaque joueur i contribue au financement du bien public, en payant un prix personnalisé $p_i(m) = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j$, pour chaque unité offerte et, le cas échéant, une partie forfaitaire (1/2) $f_i(m)^2$ ([5]). L'offre de bien public $y(m)$ est la moyenne des quantités demandées par les joueurs, c'est-à-dire $(1/n)$ $\Sigma_{i=1}^{n} y_i$.

La cohérence de l'interprétation admise à l'instant repose pour une partie sur des propriétés intrinsèques des fonctions $f_i(m)$ ($i = 1, \ldots, n$).

Pour mettre en lumière cela, considérons les profils stratégiques m, pour lesquels personne ne paye la composante forfaitaire (i.e. (1/2) $f_i(m)^2 = 0$, pour tout i ; on montre plus loin que c'est le cas à l'équilibre de Nash). De telles stratégies sont solutions du système linéaire :

$$f_i(m) = \Sigma_{i=1}^{n} p_i - 1 + \Sigma_{j\neq i}\, y_j/(n-1) - y_i = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

Il est facile de montrer que les solutions de ce système vérifient :

$$\Sigma_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ et } y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y, \qquad (2)$$

où y est un nombre quelconque.

Quand le système (2) est vérifié, il paraîtrait naturel, pour tout i, de prendre les propensions marginales à payer p_i, annoncées par les joueurs, pour fixer leur prix personnalisé, de leur faire payer la quantité demandée $y_i = y$, puis d'offrir la quantité y de bien public. En effet, d'une part, la mise en œuvre de cette procédure réaliserait, à l'évidence, l'équilibre des emplois et des ressources sur tous les marchés. D'autre part, une utilisation différente des messages des joueurs serait contradictoire avec l'interprétation que nous en donnons.

Or, pour tout profil stratégique m vérifiant (2), on vérifie facilement que :

$$p_i(m) = p_i \text{ et } y(m) = y_i, \text{ pour tout } i. \qquad (3)$$

Autrement dit, quand les joueurs coordonnent leurs stratégies (i.e. ces dernières satisfont (2)), la fonction de résultat ρ décentralise précisément l'allocation économique obtenue en suivant la procédure décrite ci-dessus.

La cohérence de l'interprétation admise dérive pour l'autre partie des propriétés incitatives du mécanisme.

Pour les obtenir, commençons par faire deux constats simples. Premièrement, sous la conjecture de Nash, le joueur i prend son prix personnalisé $p_i(m)$ pour donné, du fait qu'il est choisi par les autres. Deuxièmement, le joueur i peut toujours, par son choix de y_i, fixer librement l'offre de bien public $y(m)$, puis, par son choix de p_i, rendre nulle la composante forfaitaire (1/2) $f_i(m)^2$.

Les propriétés des profils stratégiques d'équilibre de Nash en découlent directement.

Comme il vient d'être dit, s'il choisit de respecter la contrainte $f_i(m) = 0$, non seulement le joueur i garde toute latitude pour déterminer l'offre de bien public, mais en plus il réduit strictement sa part dans le financement du bien public. Il a donc tout intérêt à le faire (ses préférences étant strictement croissantes dans le bien privé). On en conclut qu'à l'équilibre de Nash m^*, personne ne paiera la partie forfaitaire, i.e. $f_i(m^*) = 0$, pour tout i. Par suite, à l'équilibre, les conditions (2) et (3) seront vérifiées et, en particulier, on aura $\Sigma_{i=1}^{n} p_i(m^*) = 1$.

Il ressort de ce qui précède que le problème stratégique de i revient finalement à choisir l'offre de bien public, en sachant qu'il paye chaque unité à son prix personnalisé. Donc, à

([5]) Nous utilisons ici le qualificatif "forfaitaire" dans le sens de "non proportionnel" à la consommation de bien public.

l'équilibre de Nash m^*, l'offre de bien public $y(m^*)$ maximisera les préférences de tous les joueurs, sous leur contrainte budgétaire (celle-ci découlant des prix personnalisés et des dotations initiales). Combiné au fait que $\Sigma_{i=1}^{n} p_i(m^*) = 1$, on conclut que les prix personnalisés $(p_i(m^*))_{i=1}^{n}$ et l'allocation $\rho(m^*)$ formeront un équilibre de Lindahl.

Le théorème suivant reprend de façon concise tous les résultats précédents. Il est démontré en annexe.

Théorème 1 : Pour une économie *e* donnée, si le message joint $m^* = (p_i^*, y_i^*)_{i=1}^{n}$ est un équilibre de Nash du jeu associé à *D*, alors il vérifie les propriétés :

i) $p_i^* = p_i(m^*)$ et $y_i^* = y(m^*)$, pour tout i ;

ii) les prix personnalisés $(p_i(m^*))_{i=1}^{n}$ et l'allocation $\rho(m^*)$ forment un équilibre de Lindahl.

Note 3 : On a supposé pour montrer ce théorème que $X_i = \mathbb{R}^2$, pour tout *i*. Cette hypothèse est nécessaire pour que le jeu associé au mécanisme de la définition 1 soit bien défini. (Sinon, par exemple, si $X_i = \mathbb{R}^2_+$, pour un *i*, il existe des stratégies laissant *i* en dehors de son ensemble de consommation X_i.) Cette difficulté technique n'est pas propre au mécanisme proposé ici. Elle se pose en particulier dans Hurwicz (1979), Walker (1981) et Kim (1993).

Le mécanisme proposé à la définition 1 tire son originalité de la partie i) du théorème 1. En effet, plusieurs mécanismes économiques, ayant la propriété ii) à l'équilibre de Nash, existent (Hurwicz, 1979 ; Kim, 1993 ; Walker, 1981). Par contre, à notre connaissance, aucun n'a la propriété i), de révélation directe par les joueurs des informations caractéristiques de l'équilibre de Lindahl.

Le théorème 1 est vide si, pour une économie *e* donnée, le jeu associé au mécanisme *D* n'admet aucun équilibre de Nash. Il convient donc de rechercher quelles conditions l'économie *e* doit vérifier pour que ce cas ne se produise pas.

Commençons par un constat simple. En vertu du théorème 1, s'il existe un équilibre de Nash du jeu associé à *D* pour l'économie *e*, les prix personnalisés et l'allocation économique associés constituent un équilibre de Lindahl de *e*. On en déduit que les conditions d'existence d'un équilibre de Lindahl sont aussi nécessaires pour l'existence d'un équilibre de Nash.

Réciproquement, on peut se demander si le mécanisme présenté à la définition 1 est capable de décentraliser n'importe quel équilibre de Lindahl d'une économie *e* quelconque. Le théorème suivant répond à cette question par l'affirmative.

Théorème 2 : Pour une économie *e* donnée, si les prix personnalisés $(p_i^*)_{i=1}^{n}$ et l'allocation $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$ forment un équilibre de Lindahl, alors $m^* = (p_i^*, y^*)_{i=1}^{n}$ est un équilibre de Nash du jeu associé à *D* tel que $\rho(m^*) = ((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$.

Il découle des théorèmes 1 et 2 que le jeu associé à *D* admet un (resp., unique) équilibre de Nash si, et seulement si, l'économie *e* admet un (resp., unique) équilibre de Lindahl. On renvoie alors à Foley (1970) et Milleron (1972), pour l'énoncé des conditions d'existence recherchées.

5. Stabilité de l'équilibre de Nash.

Le calcul de l'équilibre de Nash par les joueurs nécessite qu'ils aient à disposition une information parfaite sur leur environnement économique. Or, dans la plupart des situations dignes d'intérêt, cette condition n'est pas remplie. Néanmoins, ceci ne disqualifie pas définitivement l'équilibre de Nash comme concept pour modéliser le comportement des joueurs dans ces situations. En effet, comme le précise Hurwicz (1972), un équilibre de Nash peut aussi s'interpréter comme l'issue d'un processus de tâtonnement à la Cournot, où les joueurs ajustent séquentiellement leurs stratégies, au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles informations. A l'instar de Kim (1993), nous modélisons ici cette dynamique comme un processus du gradient. Nous montrons alors, pour le cas d'une économie quasi-linéaire, que l'équilibre de Nash du jeu associé à notre mécanisme est l'unique point stationnaire de ce processus et est globalement stable.

Plaçons-nous dans une économie e, où les préférences $\boldsymbol{R_i}$ de tous les consommateurs soient représentables par des fonctions d'utilité $U_i(x_i, y)$ ($i = 1, \ldots, n$), dérivables jusqu'à l'ordre 1. Quand le mécanisme $D = (\mathbb{R}^{2n}, \rho)$ de la définition 1 est utilisé, pour tout profil stratégique m de $\mathbb{R}^{2n}$, l'utilité du consommateur i est égale à :

$$u_i(m) \equiv U_i(w_i - p_i(m)\, y(m) - (1/2)\, f_i(m)^2, y(m)),$$

et est dérivable.

Le processus du gradient décrit le tâtonnement des joueurs, sous l'hypothèse que chacun ajuste en temps continu sa stratégie $m_i = (p_i, y_i)$, dans la direction maximisant l'accroissement instantané de son utilité $u_i(m)$, en prenant les messages courants des autres comme des données. Formellement, si nous notons :

- $\mathrm{d}m_i/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t, \mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t)$, la variation instantanée de la stratégie de i ;
- $F_i(m\,;\,e) = (\partial u_i(m)/\partial p_i, \partial u_i(m)/\partial y_i)$, le vecteur des dérivées partielles de l'utilité de i par rapport à p_i et y_i ;

alors le processus du gradient est représentable par le système d'équations différentielles :

$$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t := (\mathrm{d}m_i/\mathrm{d}t)_{i=1}^{n} = (F_i(m\,;\,e))_{i=1}^{n} := F(m\,;\,e), \qquad m(0) = m_0, \qquad (S)$$

où $m_0 = (m_{0i})_{i=1}^{n}$ sont des conditions initiales données.

Une fois connue la stratégie initiale m_0, adressée par les joueurs à l'instant $t = 0$, la solution de (S) vérifiant $m(0) = m_0$, si elle existe, détermine l'évolution future de l'économie, sous l'hypothèse comportementale retenue ci-dessus. Un point m^* de $\mathbb{R}^{2n}$ est un point stationnaire du système (S), pour l'économie e, s'il vérifie : $F(m^*\,;\,e) = 0$. Il est dit globalement stable si, pour toute condition initiale m_0, la solution de (S), vérifiant $m(0) = m_0$, existe et tend vers m^* quand t tend vers l'infini.

Théorème 3 : Soit e une économie quasi-linéaire, i.e. telle que les fonctions d'utilité de tous les joueurs s'écrivent $U_i(x_i, y) = x_i + v_i(y)$, avec $v_i'(y) > 0 > v_i''(y)$, pour tout y. S'il en existe un, un équilibre de Lindahl est unique. Notons-le $(p_i^*)_{i=1}^{n}$ et $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$. L'unique point stationnaire du système différentiel (S) se confond avec l'équilibre de Nash $m^* = (p_i^*, y^*)_{i=1}^{n}$, associé à l'équilibre de Lindahl, et est globalement stable.

6. Annexes.

Enoncé des mécanismes économiques existants

Note : Dans les 2 premiers mécanismes, la suite des indices $(i+1)_{i=1}^{n}$ est définie ici modulo n.

Hurwicz (1979). Ce mécanisme est défini pour $n \geq 3$. L'espace des messages d'un joueur i est $\mathbb{R}^2$, dont un élément se note $m_i = (p_i, y_i)$. Pour tout m de $\mathbb{R}^{2n}$, la fonction de résultat s'écrit :

$$\rho(m) = ((w_i - p_i(m)\, y(m) - r_i(m))_{i=1}^{n}, y(m)),$$

où :

$$p_i(m) = 1/n + p_{i+1} - p_{i+2},$$
$$y(m) = (1/n)\, \Sigma_{i=1}^{n} y_i,$$
$$r_i(m) = p_i(y_i - y_{i+1})^2 - p_{i+1}(y_{i+1} - y_{i+2})^2.$$

Walker (1981). Ce mécanisme est défini pour $n \geq 3$. L'espace des messages d'un joueur i est $\mathbb{R}$, dont un élément est noté m_i. Pour tout m de $\mathbb{R}^n$, la fonction de résultat est donnée par :

$$\rho(m) = ((w_i - p_i(m)\, y(m))_{i=1}^{n}, y(m)),$$

où :

$$p_i(m) = 1/n - m_{i+1} + m_{i+2},$$
$$y(m) = \Sigma_{i=1}^{n} m_i.$$

Kim (1993). Ce mécanisme est défini pour $n \geq 2$. L'espace des messages d'un joueur i est $\mathbb{R}^2$, dont un élément se note $m_i = (p_i, y_i)$. Pour tout m de $\mathbb{R}^{2n}$, la fonction de résultat s'écrit :

$$\rho(m) = ((w_i - p_i(m)\, y(m) - (1/2)\, f_i(m)^2)_{i=1}^{n}, y(m)),$$

où :

$$p_i(m) = 1/n - \Sigma_{j\neq i}\, y_j + (1/n)\, \Sigma_{j\neq i}\, p_j,$$
$$y(m) = \Sigma_{i=1}^{n} y_i.$$
$$f_i(m) = p_i - \Sigma_{i=1}^{n} y_i.$$

Démonstration du Théorème 1.

Soient e une économie donnée et $m^* = (p_i^*, y_i^*)_{i=1}^{n}$ un équilibre de Nash du jeu associé à D.

i) Supposons (raisonnement par l'absurde) qu'il existe i tel que $f_i(m^*) \neq 0$. En posant $m_i = (y_i^* - \Sigma_{j\neq i}\, y_j^*/(n-1) - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* + 1, y_i^*)$, on a :

$p_i(m^*/m_i) = p_i(m^*) = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^*$;
$f_i(m^*/m_i)^2 = 0 < f_i(m^*)^2$;
$y(m^*/m_i) = y^*(m^*)$.

Donc, en adoptant m_i, le joueur i réduit sa contribution, sans changer l'offre de bien public. Comme $\boldsymbol{R_i}$ est strictement croissante dans le bien privé, il s'ensuit que :

$$(w_i - p_i(m^*/m_i)\, y(m^*/m_i) - (1/2)\, f_i(m^*/m_i)^2, y(m^*/m_i))$$
$$\boldsymbol{P_i}\, (w_i - p_i(m^*)\, y(m^*) - (1/2)\, f_i(m^*)^2, y(m^*)).$$

Autrement dit, $(m^*/m_i)\ \boldsymbol{P_i^*}\ m^*$ et m^* n'est pas un équilibre de Nash.

A l'équilibre de Nash m^*, on a donc :

$$f_i(m^*) = 0, \text{ pour tout } i. \tag{A1}$$

Maintenant, notons que $\Sigma_{i=1}^{n} f_i(m) = n\, (\Sigma_{i=1}^{n} p_i - 1)$, pour tout m. En vertu de (A1), il s'ensuit que, à l'équilibre de Nash m^* :

$$\Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1. \tag{A2}$$

En substituant dans $f_i(m^*)$, on obtient alors :

$$f_i(m^*) = \Sigma_{j\neq i}\, y_j^* - (n-1)\, y_i^* = 0, \text{ pour tout } i. \tag{A3}$$

On déduit directement de (A1), (A2) et (A3) que, pour tout i :

$$p_i^* = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* = p_i(m^*)\ ; \tag{A4}$$
$$y_i^* = (1/n)\, \Sigma_{i=1}^{n} y_i^* = y^*(m^*). \tag{A5}$$

ii) Notons : $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*) = \rho^*(m^*)$ l'allocation associée à m^*.

Comme $f_i(m^*) = 0$, pour tout i, cette allocation s'écrit :

$$((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*) = ((w_i - p_i(m^*)\, y(m^*))_{i=1}^{n}, y(m^*)).$$

Elle est possible, car $\Sigma_{i=1}^{n} p_i(m^*) = \Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1$ (Cf. (A2) et (A4)) implique que :

$$\Sigma_{i=1}^{n} x_i^* + y^* = \Sigma_{i=1}^{n} (w_i - p_i(m^*)\, y^*) + y^* = \Sigma_{i=1}^{n} w_i + (1 - \Sigma_{i=1}^{n} p_i(m^*))\, y^* = \Sigma_{i=1}^{n} w_i.$$

En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe i et un couple (x_i, y) donné, tels que :

$$(x_i, y)\ \boldsymbol{P_i}\ (x_i^*, y^*) \text{ et } x_i + p_i(m^*)\, y \leq w_i.$$

Du fait que $\boldsymbol{R_i}$ est strictement croissante dans le bien privé, on peut supposer, sans perte de généralité, que le panier (x_i, y) sature la contrainte budgétaire de i : $x_i + p_i(m^*)\, y = w_i$. En substituant (on utilise $x_i = w_i - p_i(m^*)\, y$ et $(x_i^*, y^*) = (w_i - p_i(m^*)\, y(m^*), y(m^*))$), on aurait donc un i et un nombre y tel que :

$$(w_i - p_i(m^*)\, y, y)\ \boldsymbol{P_i}\ (w_i - p_i(m^*)\, y(m^*), y(m^*)).$$

En posant $m_i = (n\, (y - \Sigma_{j\neq i}\, y_j^*/(n-1)) - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* + 1, n\, y - \Sigma_{j\neq i}\, y_j^*)$, on a :

$$p_i(m^*/m_i) = p_i(m^*) = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* ;$$
$$f_i(m^*/m_i)^2 = f_i(m^*)^2 = 0 ;$$
$$y(m^*/m_i) = y.$$

En substituant, on trouve :

$$(w_i - p_i(m^*/m_i)\, y(m^*/m_i) - (1/2)\, f_i(m^*/m_i)^2, y(m^*/m_i))$$
$$\boldsymbol{P_i}\ (w_i - p_i(m^*)\, y(m^*) - (1/2)\, f_i(m^*)^2, y(m^*)).$$

Autrement dit, $(m^*/m_i)\ \boldsymbol{P_i^*}\ m^*$ et m^* n'est pas un équilibre de Nash.

On en conclut que $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$ est possible et vérifie, pour tout i : $(x_i^*, y^*)\ \boldsymbol{R_i}\ (x_i, y)$, pour tout (x_i, y) tel que $x_i + p_i(m^*)\, y \leq w_i$. CQFD

Démonstration du Théorème 2.

Pour une économie e donnée, soit $(p_i^*)_{i=1}^{n}$ et $((x_i^*)_{i=1}^{n}, y^*)$ un équilibre de Lindahl. Par définition, on a :

$$\Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1 ;$$
$$(x_i^*, y^*)\ \boldsymbol{R_i}\ (x_i, y) \text{ pour tout } (x_i, y) \in X_i \text{ tel que } x_i + p_i^*\, y \leq w_i, \text{ pour tout } i.$$

Comme $\boldsymbol{R_i}$ est strictement croissante dans le bien privé, on peut raisonner en supposant que la contrainte de budget est toujours saturée. Donc, pour tout i et tout y, on a :

$$(w_i - p_i^*\, y^*, y^*)\ \boldsymbol{R_i}\ (w_i - p_i^*\, y, y). \qquad \text{(A6)}$$

Posons $m^* = (p_i^*, y^*)_{i=1}^{n}$. Par définition :

$$p_i(m^*) = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* = p_i^* \text{ (car } \Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1) ;$$
$$f_i(m^*)^2 = 0 \text{ (car } \Sigma_{i=1}^{n} p_i^* = 1 \text{ et } y_i^* = \Sigma_{j\neq i}\, y_j^*/(n-1)) ;$$
$$y(m^*) = y^*.$$

En substituant dans (A6), il s'ensuit que, pour tout i et tout y :

$$(w_i - p_i(m^*)\, y(m^*) - (1/2)\, f_i(m^*)^2, y(m^*))\ \boldsymbol{R_i}\ (w_i - p_i(m^*)\, y, y). \qquad \text{(A7)}$$

Pour tout i, posons maintenant, $m_i = (p_i, n\, y - \Sigma_{j\neq i}\, y^*)$, où p_i est un nombre quelconque. Par définition :

$$p_i(m^*/m_i) = p_i(m^*) = 1 - \Sigma_{j\neq i}\, p_j^* ;$$
$$f_i(m^*/m_i)^2 \geq f_i(m^*)^2 = 0$$
$$y^*(m^*/m_i) = y.$$

Substituons $p_i(m^*/m_i) = p_i(m^*)$ et $y^*(m^*/m_i) = y$ dans le membre de droite de (A7). Pour tout i et tout m_i, on obtient :

$$(w_i - p_i(m^*)\, y(m^*) - (1/2)\, f_i(m^*)^2, y(m^*))\ \boldsymbol{R_i}\ (w_i - p_i(m^*/m_i)\, y(m^*/m_i), y(m^*/m_i)). \qquad \text{(A8)}$$

Comme $\boldsymbol{R_i}$ est strictement croissante dans le bien privé et $f_i(m^*/m_i)^2 \geq 0$, on peut écrire, pour tout i et tout m_i :

$$(w_i - p_i(m^*/m_i)\, y(m^*/m_i), y(m^*/m_i))$$
$$\boldsymbol{R_i}\ (w_i - p_i(m^*/m_i)\, y(m^*/m_i) - (1/2)\, f_i(m^*/m_i)^2, y(m^*/m_i)). \qquad \text{(A8)}$$

Par transitivité de $\boldsymbol{R_i}$, on trouve finalement :

$$(w_i - p_i(m^*)\, y(m^*) - (1/2)\, f_i(m^*)^2, y(m^*))$$

$$\boldsymbol{R_i}\ (w_i - p_i(m^*/m_i)\ y(m^*/m_i) - (1/2)\ f_i(m^*/m_i)^2, y(m^*/m_i)). \quad \text{(A9)}$$

Par conséquent, on a, pour tout i :

$m^*\ \boldsymbol{R_i^*}\ (m^*/m_i)$, pour tout $m_i \in M_i$,

c'est-à-dire que m^* est un équilibre de Nash du jeu associé à D. CQFD

Démonstration du théorème 3.

Soit e une économie quasi-linéaire, admettant un équilibre de Lindahl. Donc, il existe des prix personnalisés $(p_i^*)_{i=1}^n$ et une allocation $((x_i^*)_{i=1}^n, y^*)$, vérifiant (6) :

$p_i^* = v_i'(y^*)$ et $x_i^* + p_i^*\ y^* = w_i$, pour tout i,

$\Sigma_{i=1}^n\ p_i^* = \Sigma_{i=1}^n\ v_i'(y^*) = 1.$

Sachant que les propensions marginales à payer $v_i'(y)$ sont décroissantes, la dernière égalité implique l'unicité de l'équilibre de Lindahl.

Quand le mécanisme $D = (\mathbb{R}^{2n}, \rho)$ de la définition 1 est utilisé, l'utilité de i s'écrit, pour tout m :

$$u_i(m) = w_i - (1 - \Sigma_{j\neq i}\ p_j)\ \Sigma_{i=1}^n\ y_i/n$$
$$- (1/2)\ (\Sigma_{i=1}^n\ p_i - 1 + \Sigma_{j\neq i}\ y_j/(n-1) - y_i)^2 + v_i(\Sigma_{i=1}^n\ y_i/n).$$

Alors, le système (S) est défini, pour tout i, par :

$$\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t = -(\Sigma_{i=1}^n\ p_i - 1 + \Sigma_{j\neq i}\ y_j/(n-1) - y_i),$$
$$\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t = (1/n)\ [v_i'(\Sigma_{i=1}^n\ y_i/n) - (1 - \Sigma_{j\neq i}\ p_j)] + (\Sigma_{i=1}^n\ p_i - 1 + \Sigma_{j\neq i}\ y_j/(n-1) - y_i).$$

Par définition, un point stationnaire de (S) est tel que : $\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t = 0$, pour tout i. Donc, par construction de (S), il vérifie les conditions nécessaires (du premier ordre) de maximisation de l'utilité de i, par rapport à p_i et y_i, pour tout i. Dans l'économie e, ces conditions sont suffisantes (car l'utilité $u_i(m)$ de i est une fonction strictement concave de ses variables de décisions). Il s'ensuit qu'un point stationnaire de (S) coïncide avec un équilibre du Nash du jeu associé à D. En vertu du théorème 1, il s'ensuit aussi qu'il coïncide avec un équilibre de Lindahl de l'économie e. Comme il n'en existe qu'un dans l'économie e, le point stationnaire de (S) ne peut être autre que $m^* = (p_i^*, y^*)_{i=1}^n$.

Soient $P = \Sigma_{i=1}^n\ p_i$ et $Y = \Sigma_{i=1}^n\ y_i/n$. En substituant dans (S), on trouve, pour tout i (7) :

$$\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t = n\ y_i/(n-1) - (P-1) - n\ Y/(n-1),$$
$$\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t = -(1/n)\ p_i - n\ y_i/(n-1) + (1 + 1/n)\ (P-1) + n\ Y/(n-1) + (1/n)\ v_i'(Y).$$

Procédons, pour tout i, au changement de variables :

$$q_i = (p_i - p_i^*) + n\ (y_i - y^*)\ ;$$
$$z_i = (n-1)\ (p_i - p_i^*) + n\ (y_i - y^*).$$

En dérivant, on déduit de (S) un nouveau système (S'), défini, pour tout i, par :

$$\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t + n\ \mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t,$$
$$= -q_i + n\ (P-1) + n\ (Y - y^*) + (v_i'(Y) - p_i^*),$$
$$\mathrm{d}z_i/\mathrm{d}t = (n-1)\ \mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t + n\ \mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t,$$
$$= -z_i/(n-1) + 2\ (P-1) - n\ (Y - y^*)/(n-1) + (v_i'(Y) - p_i^*).$$

Par linéarité, ces deux systèmes sont équivalents : à toute solution de l'un (pour des conditions initiales données), correspond une solution de l'autre, obtenue par changement de variables. En particulier, si l'on montre que, quelles que soient les conditions initiales, la solution $(q_i, z_i)_{i=1}^n$ de (S') tend vers $\mathbf{0}$, on pourra conclure que, quelles que soient les conditions

(6) La première ligne énonce la condition nécessaire et suffisante pour maximiser l'utilité des joueurs, sous leur contrainte de budget.

(7) On utilise : $P = \Sigma_{i=1}^n\ p_i$, $P - p_i = \Sigma_{j\neq i}\ p_j$, $Y = \Sigma_{i=1}^n\ y_i/n$ et $nY - y_i = \Sigma_{j\neq i}\ y_j$.

initiales, la solution $(p_i, y_i)_{i=1}^n$ de (S) tend vers $(p_i^*, y^*)_{i=1}^n$. C'est-à-dire que le point stationnaire de (S) est globalement stable. On utilise pour cela les lemmes 1 et 2 ci-dessous.

Lemme 1 : Si $m = (p_i, y_i)_{i=1}^n$ vérifie (S), alors (P, Y) tend vers (1, y^*) quand t tend vers l'infini.

En effet, sous l'hypothèse posée, l'évolution de P et Y est régie par le système (S") :

$$dP/dt = \Sigma_{i=1}^n dp_i/dt = -n (P-1),$$

$$dY/dt = (1/n) \Sigma_{i=1}^n dy_i/dt = (1/n^2) [(\Sigma_{i=1}^n v'(Y) - 1) + q(n) (P-1)],$$

où l'on pose : $q(n) = (n^2 + n - 1)$.

Notons que l'unique point stationnaire de (S") est $(P, Y) = (1, y^*)$ (en se souvenant que y^* est défini par $\Sigma_{i=1}^n v_i'(y^*) = 1$).

Considérons maintenant la fonction :

$$w(P, Y) = \Sigma_{i=1}^n v_i(Y) - Y - (n/2) (P-1)^2.$$

Elle admet un maximum global au point $(P, Y) = (1, y^*)$ (car $\Sigma_{i=1}^n v_i'(y^*) = 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour la maximisation de $\Sigma_{i=1}^n v_i(Y) - Y$).

Si P et Y suivent l'évolution induite par (S"), on a :

$$\begin{aligned}(dw/dt)(P, Y) &= (\Sigma_{i=1}^n v_i'(Y) - 1)\, dY/dt - n (P-1)\, dP/dt,\\ &= (1/n^2) \{(\Sigma_{i=1}^n v_i'(Y) - 1)^2 + q(n) (\Sigma_{i=1}^n v_i'(Y) - 1)(P-1) + n^4 (P-1)^2\},\\ &= (1/n^2) \{[(\Sigma_{i=1}^n v_i'(Y) - 1) + (q(n)/2)(P-1)]^2 + [n^4 - (q(n)/2)^2] (P-1)^2\}.\end{aligned}$$

En notant que $n^4 - (q(n)/2)^2 > 0$, on conclut que, en dehors du point stationnaire $(P, Y) = (1, y^*)$, on a toujours :

$$(dw/dt)(P, Y) > 0.$$

Par conséquent, $w(P, Y)$ est une fonction de Lyapunov pour l'évolution (S") et, par théorème, l'équilibre stationnaire $(P, Y) = (1, y^*)$ est globalement stable.

Lemme 2 : Si $a < 0$ et si $b(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 quand t tend vers l'infini, alors la solution de :

$$(E) \qquad dx(t)/dt = a\, x(t) + b(t), \qquad x(0) = x_0,$$

tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

En effet, la solution de (E) est :

$$x(t) = e^{-at} [x_0 + \int_0^t e^{as} b(s)\, ds].$$

On a :

$$|x(t)| \leq e^{-at} [|x_0| + \int_0^t e^{as} |b(s)|\, ds].$$

Comme $b(t)$ tend vers 0 à l'infini, pour tout $\varepsilon_0 = a\varepsilon/2 > 0$, il existe t_0 tel que, pour tout $t > t_0$, $|b(t)| < \varepsilon_0$. Soit $A = \text{Sup}\{|b(t)| \,;\, t \geq 0\}$ ($A < \infty$, car $b(t)$ est continue et tend vers 0). Pour tout $t > t_0$, on montre :

$$\begin{aligned}|x(t)| &< e^{-at} [|x_0| + A \int_0^{t_0} e^{as}\, ds + \varepsilon_0 \int_{t_0}^t e^{as}\, ds],\\ &< e^{-at} \{|x_0| + (1/a) [A (e^{at_0} - 1) + \varepsilon_0 (e^{at} - e^{at_0})]\}.\end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers $\varepsilon_0/a = \varepsilon/2$ quand t tend vers l'infini. Il s'ensuit que $|x(t)|$ devient plus petit que ε pour t suffisamment grand. Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on en conclut que $x(t)$ tend vers 0 à l'infini.

Pour conclure, il reste à combiner les lemmes 1 et 2. En vertu du premier, la solution de (S) est telle que la trajectoire (P, Y) est continue (car dérivable) et tend vers (1, y^*) quand t tend vers l'infini. Par suite, le système (S') se compose d'équations différentielles vérifiant les propriétés du lemme 2 (car les grandeurs (P – 1), (Y – y*) et ($v_i'(Y) - p_i^*$) (i = 1, …, n) sont continues et tendent vers 0). Donc, après le changement de variable, la solution de (S) vérifie le système (S') et tend vers **0**. Autrement dit, la solution de (S) converge vers le point stationnaire de (S).

7. Références.

Chen, Y. and C.R. Plott (1996), "The Groves-Ledyard Mechanism: An Experimental Study of Institutional Design", Journal of Public Economics, 59, 335-364.

Chen, Y. and F.-F. Tang (1998), "Learning and Incentive Compatible Mechanisms for Public Goods Provision: An Experimental Study", Journal of Political Economy, 106, 3, 633-662.

Chen, Y. (2002), "A family of Supermodular Nash Mechanisms Implementing Lindahl Allocations for Quasi-linear Environments", Economic Theory, 19, 4, 773-790.

Chen, Y., "Dynamic Stability of Nash-Efficient Public Goods Mechanisms: Reconciling Theory with Experiments", in R. Zwick and A. Rapoport (Eds.), Experimental Business Research, Vol. II., Kluwer Academic Publishers: Norwell, MA and Dordrecht, The Netherlands, 2005.

Falkinger J. (1996), "Efficient Private Provision of Public Goods by Rewarding Deviations from Average", Journal of Public Economics, 62: 413-422.

Foley, D.K. (1970), "Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods", Econometrica, 38(1): 66-72.

Groves, T. and J. Ledyard (1977), "Optimal Allocation of Public Goods: A solution to the "Free Rider" Problem", Econometrica, 45(4): 783-810.

Groves, T. (1979), "Efficient Collective Choice when Compensation is Possible", Review of Economic Studies, 46(2): 227-241.

Groves, T. and J. Ledyard (1980), "The Existence of Efficient and Incentive Compatible Equilibria with Public Good", Econometrica, 48(6): 1487-1506.

Hurwicz, L. (1979), "Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocation at Nash Equilibrium Points", Review of Economic Studies, 46(2): 217-225.

Hurwicz, L. (1972), "On Informationally Decentralized Systems", in C. McGuire and R. Radner, Decision and Organization, Amsterdam, 1972.

Johansen, L. (1963), "Some Notes on the Lindahl Theory of Determination of Public Expenditures", International Economic Review, 4(3): 346-358.

Kim, T. (1993), "A stable Nash mechanism implementing Lindahl allocations for quasi-linear Environments", Journal of Mathematical Economics, 22 (1993): 359-371.

Lindahl, E. (1919), "Just Taxation: A Positive Solution", reprinted in Musgrave, R.A. and A.T. Peacock, Classics in the Theory of Public Finance, MacMillan, 1967.

Milleron, J. (1972), "Theory of Value with Public Good: A Survey Article", Journal of Economic Theory, 5: 419-477.

Samuelson, P.A. (1954), "The Pure Theory of Public Expenditure", Review of Economic Studies, 36(4): 387-389.

Samuelson, P.A. (1966), "", .

Smith, V.L. (1980), "Experiments with a Decentralized Mechanism for Public Goods Decisions", American Economic Review, 70(4): 584-599.

Walker, M. (1981), "A Simple Incentive Compatible Scheme for Attaining Lindahl Allocations", Econometrica, 49(1): 65-71.