Notes de cours

Théorie des jeux

Sébastien Rouillon

2004

Chapitre I

Modélisation de situations de concurrence

1) Jeux sous formes extensive

Pour représenter un jeu non coopératif sous forme extensive, on a besoin :

a) d'un ensemble fini de joueur 1, 2, ..., I et Nature ;

b) d'un arbre du jeu : il se compose d'un ensemble fini τ dont les éléments sont des noeuds t. Ces derniers sont ordonnés par une relation binaire de succession. On définit alors :

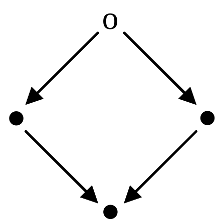
- des noeuds initiaux symbolisés par des ronds vides : ils n'ont pas de prédécesseurs ;
- des noeuds terminaux symbolosés par un vecteur de paiements des joueurs : ils n'ont pas de successeur ;
- des noeuds de décision symbolisés par des ronds pleins : ils ont des prédécesseurs et des succésseurs.

La relation de succession construit un arbre avec τ si :

- $t' \succ t$ signifie t' succède à t ;
- elle est antisymétrique : $t' \succ t$ et $t \succ t'$ implique $t' = t$;
- elle est transitive : $t' \succ t$ et $t'' \succ t'$ implique $t'' \succ t$;
- elle ordonne totalement les prédécesseurs de tous les noeuds : $t'' \succ t$, $t'' \succ t'$ et $t \neq t'$ implique $t \succ t'$ ou $t' \succ t$.

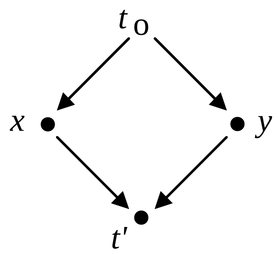
Il s'ensuit que, dans un arbre :

- tout noeud a un prédécesseur immédiat et un seul : on représente par une flèche orientée du prédécesseur immédiat vers le successeur ;
- les cycles sont impossibles : un noeud ne peut pas être sont propre successeur :



Cette situation est impossible dans un arbre.

- il existe un chemin unique allant de t à t' :



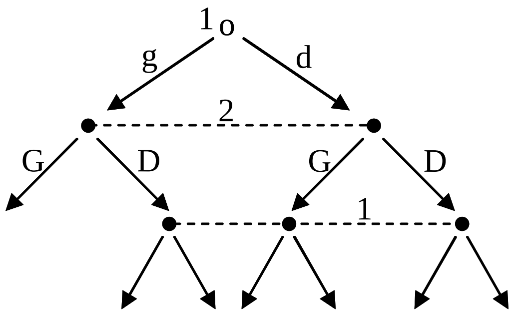
On voit que ceci contredit l'idée que tous les prédesseurs d'un noeud sont totalement ordonnés (cf. x et y, qui sont inclassables).

c) d'associer à chaque noeud de décision un joueur i ou Nature ;

d) d'associer à chaque noeud de décision un ensemble d'actions fini et une bijection qui détermine le successeur de ce noeud en fonction de l'action choisie. Il s'ensuit qu'un noeud de décision a autant de successeurs immédiats que d'éléments dans son ensemble d'actions (si un élément, le noeud est trivial ; si, par extension, l'ensemble d'action est un intervalle de IR, comme dans un duopole de Cournot ou de Bertrand, il y a une infinité de successeurs immédiats). L'ensemble des actions se note $A(t)$;

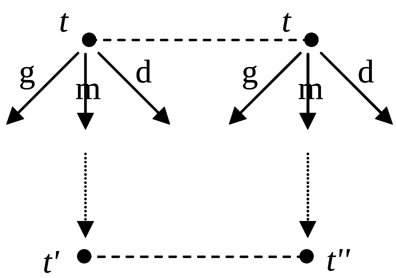
e) de préciser les informations disponibles à chaque noeud de décision, qui conditionnent les choix du joueur amené à jouer à ce noeud. D'abord, on suppose que les joueur comprennent la structure du jeu et l'arbre. Ainsi, s'il sait sur quel noeud de décision il se trouve, il choisit son action en regard de tous les successeurs de ce noeud. Par rapport à ce cas où il dispose de toute l'information possible compte tenu de l'arbre, son information sera appauvrie s'il ignore sur quel noeud de décision il se trouve. Plus précisément, on définit des ensembles d'information qui réalisent une partition des noeuds de décision (ce qui implique qu'un noeud appartient à un ensemble d'information et un seul). Les noeuds d'un même ensemble d'information sont reliés dans les schémas par un trait en pointillés. On impose les restrictions suivantes :

- si $t \succ t'$ ou $t' \succ t$, t et t' ne sont pas dans le même ensemble d'information : le joueur se souvient des noeuds passés. Ceci n'exclut pas toutefois que le joueur oublie ce qu'il a fait par le passé :



Dans cet exemple, le joueur 1 choisit gauche ou droite ; le joueur 2 répond ; s'il lui redonne la main, le joueur ne sait pas distinguer (g, D), (d, G) et (d, D) ; concernant les deux derniers, cela signifie simplement qu'il ignore si 2 a joue G ou D ; concernant le premier, cela implque qu'il a oublié son premier coup.

Si l'on veut éliminer ce type de possibilités, on impose en plus une condition de mémoire parfaite. Si t, t' et t'' sont des noeuds de décision d'un même joueur où $t' \succ t$ et t' et t'' sont dans le même ensemble d'information, alors, t'' doit avoir un prédécesseur dans le même ensemble d'information que t, noté t_0, et le joueur doit y avoir fait la même action :

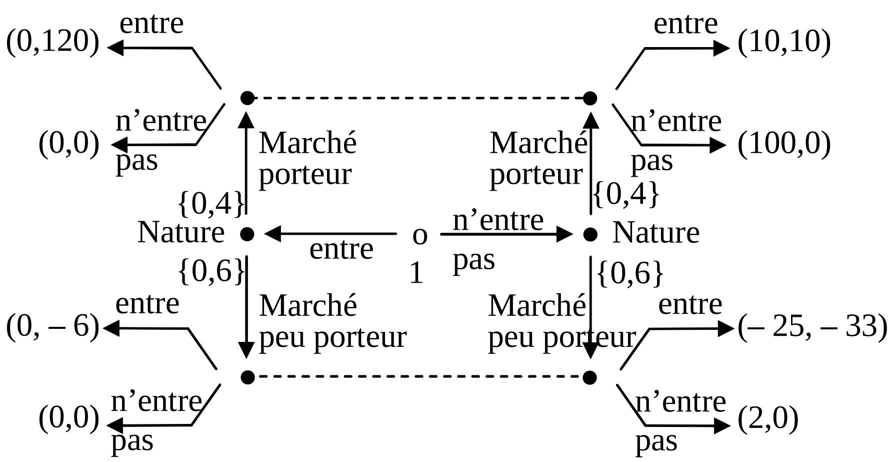


- tous les noeuds d'un même ensemble d'information sont attribués au même joueur. Sinon, les joueurs sauraient dans quelle partie de l'ensemble d'information il se trouve et il y aurait logiquement autant d'ensembles d'information que de joueurs ;

- les ensembles d'actions associés aux noeuds d'un même ensemble d'information sont égaux. Sinon, le joueur aurait tôt fait, connaissant l'arbre du jeu, de déduire de l'absence de telle ou telle action, la partie de l'ensemble d'information dans laquelle il se trouve.

f) de donner un paiement à chacun des joueurs en chacun des noeuds terminaux de l'arbre. Ils se présentent sous la forme d'un vecteur de paiements à côté du noeud en question ;

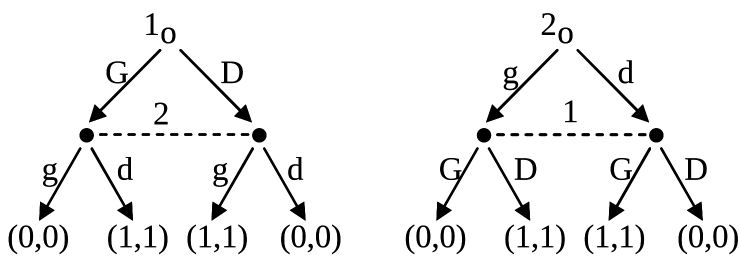
g) d'attribuer une distribution de probabilité sur l'ensemble des noeuds initiaux et, plus généralement, une distribution de probabilité sur l'ensemble des actions disponibles à chaque noeud où Nature joue. Dans les figures, ces probabilités sont représentées entre accolades. Exemple :



Le jeu commence par le noeud initial o. Le joueur 1 choisit dans son ensemble d'action {entre ; n'entre pas}. La Nature détermine l'état du marché et choisit dans son ensemble d'action {marché porteur ; marché peu porteur} avec une probabilité 0,4 pour la première, et 0,6 pour la seconde. Le joueur 2 joue une action dans l'ensemble {entre ; n'entre pas}. Le joueur 1 ne connaît ni l'état du marché, c'est-à-dire l'action de Nature, ni l'action de 2. Le joueur 2 a deux ensembles d'information : en haut, quand le marché est porteur ; en bas, quand le marché n'est pas porteur. Cela signifie qu'il connaît l'état du marché (l'action de Nature) avant de prendre sa décision. Par contre, il ne connaît pas l'action de A au moment de sa décision : quelle que soit le choix de 1, le joueur 2 est dans le même ensemble d'information.

Il faut noter que l'ordre d'apparition des joueurs n'importe pas. Ainsi, à titre d'exercice, construire l'arbre équivalent pour les ordres N, 1, 2 et N, 2, 1. La seule contrainte est que la nature joue avant le joueur 2, puisque ce dernier connaît l'état du marché.

- Jeu de coordination :



Ces deux arbres sont parfaitement équivalents. Dans chaque cas, les joueurs 1 et 2 choisissent dans {g ; d} et {G ; D} respectivement, sans savoir ce que l'autre a fait. Ceci montre que la représentation sous forme extensive est parfaitement compatible avec l'idée de coups simultanés. Noter au passage le sens particulier de "simultané" en théorie des jeux : cela ne signifie pas que les décisions sont prises en même temps, mais qu'elles sont prises dans l'ignorance des décisions adverses.

Précaution : souvent, pour modéliser une situation de concurrence, plusieurs arbres peuvent paraître plausibles, sans que l'on puisse prendre parti définitivement pour l'un ou l'autre. C'est tout particulièrement le cas dans le marchandage (cf. Chap.), où plusieurs protocoles sont concevables : successions d'offres, offres simultanées, nombre de tours, etc. Pour chaque, une arbre peut être construit, figeant les règles de façon rigide.

2) Jeux sous forme normale ou stratégique

Il est une autre façon de concevoir un jeu que celle qui transpire de la présentation sous forme extensive. Comme on a déjà eu l'occasion de le noter, l'ordre d'apparition des joueurs dans l'arbre est en partie libre, au moins sous réserve de respecter les ensembles d'information des joueurs (c'est-à-dire la règle suivant laquelle si un joueur connaît, avec de choisir une action, un coup d'un autre joueur ou un coup de Nature, alors le noeud représentant ce coup doit précéder le noeud où le joueur choisit cette action). Ceci suggère la possibilité de représenter le jeu sous une forme où l'ordre serait réduit et l'arbre serait applati, connue sous le nom de forme normale ou forme stratégique du jeu.

Un jeu sous forme normale comprend :

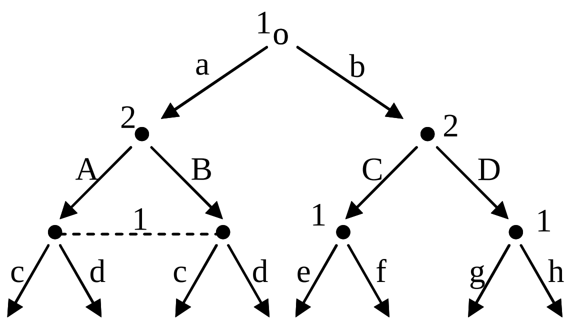
a) l'ensemble des joueur 1, 2, ..., I ;

b) un ensemble de stratégies S_i pour chaque joueur ;

c) un paiement u_i pour chaque joueur et pour chaque profil de stratégies $s = (s_1, s_2, ...s_I) \in S_1 \times S_{2\times} ... \times S_I$.

Le concept de stratégie est central et résume à lui seul l'intégralité de l'arbre. Une stratégie d'un joueur i est une liste complète d'actions à exécuter en chacun de ses ensembles d'information dans l'arbre (ce n'est pas un liste d'actions pour chaque noeud dans la mesure où le joueur est contraint de choisir la même action en chacun des noeuds d'un même ensemble d'information).

Exemple : Considérons l'arbre suivant :



Le joueur 1 agit dans cinq noeuds de décision et quatre ensembles d'information (quand il joue a, il ne peut pas connaître la décision de 2). A chaque ensemble d'information, l'ensemble des actions disponibles contient deux éléments. Comme une stratégie es la donnée d'une action par ensemble d'information, on a 2^4 stratégies possibles :

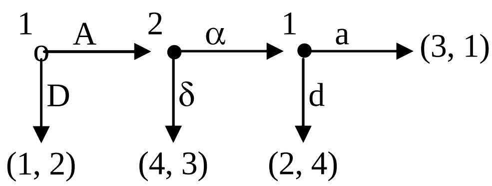
	Ensembles d'information			
Ensembles d'action	a	c	e	g
	b	d	f	h

Liste des stratégies : a c e g ; b c e g ; a d e g ; b d e g ; a c f g ; b c f g ; a d f g ; b d f g ; a c e h ; b c e h ; a d e h ; b d e h ; a c f h ; b c f h ; a d f h ; b d f h.

Il s'ensuit que l'ensemble de stratégies du joueur i est l'ensemble produit $\prod_h A(h)$ pour tous les ensembles d'information h où il intervient (soit $h \in H$ tel que $\eta(h) = i$). De façon générale, le nombre de stratégies possibles d'un joueur est donc $\prod_h card(A(h))$.

Le fait que, par définition, une stratégie détermine ce que le joueur fait en chaque ensemble d'information de l'arbre permet une nouvelle représentation du jeu. Dans le cas où il y a deux joueurs, on pourra proposer une représentation matricielle ; sinon, on donnera un vecteur de paiements $(u_1, u_2, ..., u_I)$. Ceci est possible parce qu'à tout profil de stratégies $(s_1, s_2, ..., s_I)$ correspond un chemin et un seul sur l'arbre et donc, un noeud terminal et un seul (parabole : une voie ferrée est un arbre ; les stratégies sont les commandes de tous les aiguillages dont un joueur a la responsabilité ; un profil de stratégie est donc une commande de tous les aiguillages sans exception et détermine une seule destination). Le vecteur des paiements s'obtient en identifiant le noeud terminal correspondant au profil de stratégies.

Exemple :



Joueur 1 :

2 ensembles d'information ;

2 actions à chaque ensemble d'information.

Donc 4 stratégies possibles : Aa ; Ad ; Da ; Dd.

Joueur 1 :

1 ensemble d'information ;

2 actions à chaque ensemble d'information.

Donc 2 stratégies possibles : α ; β.

Identification des paiements :

$$\begin{aligned}(u_1(s), u_2(s)) &= (1,2) \text{ si } s = (Da, \delta), (Dd, \alpha), ... \\ &= (3,1) \text{ si } s = (Aa, \alpha)\end{aligned}$$

Représentation sous forme matricielle :

		Joueur 2	
		α	β
	Aa	$(3,1)$	$(4,3)$
Joueur 1	Ad	$(2,4)$	$(4,3)$
	Da	$(1,2)$	$(1,2)$
	Dd	$(1,2)$	$(1,2)$

Pour le cas où la Nature joueurait, on utilisera le critère d'utilité espérée pour calculer les paiements des joueurs.

3) Correspondance entre les stratégies mixtes et les stratégies mixtes de comportement

Dans un jeu sous forme normale, on définit une stratégie mixte comme une loterie sur l'ensemble des stratégies. Pour être précis, soit $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\}$ l'ensemble des stratégies de i (k est fini). Définissons l'ensemble des distributions de probabilité sur S_i :

$$\sum\nolimits_i = \left\{\sigma_i = \left(\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k\right); 0 \le \sigma_i^j \le 1 \text{ pour } j = 1, 2, ..., k \text{ et } \sum\nolimits_{j=1}^k \sigma_i^j = 1\right\}$$

ou :

$$\sum\nolimits_i = \left\{\sigma_i(s_i); 0 \le \sigma_i(s_i) \le 1 \text{ pour } s_i \in S_i \text{ et } \sum\nolimits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\right\}$$

Un élément σ_i de cet ensemble est une stratégie mixte. C'est une distribution de probabilité qui, à toute stratégie s_i de S_i, donne la probabilité $\sigma_i(s_i)$ qu'elle soit jouée par i. Une stratégie σ_i de $\sum_i$ telle que $\sigma_i(s_i) = 1$ est appelée stratégie pure.

Comme les joueurs tirent leur stratégie au sort indépendemment, on peut déduire du profil stratégique $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_I)$ la probabilité que le profil stratégique $(s_1, s_2, ..., s_I)$ soit joué :

- le joueur 1 joue s_1 avec la probabilité $\sigma_1(s_1)$;
- le joueur 2 joue s_2 avec la probabilité $\sigma_2(s_2)$;

...

- le joueur I joue s_I avec la probabilité $\sigma_I(s_I)$.

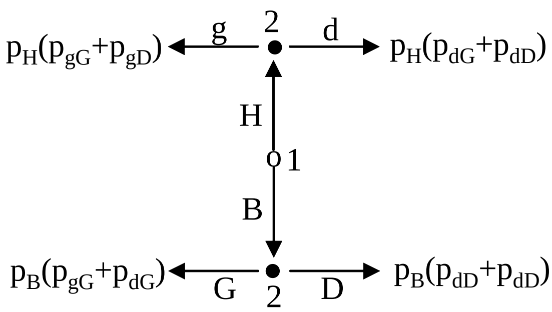
Donc, au total, le profil stratégique $s = (s_1, s_2, ..., s_I)$ est joué avec la probabilité $P(s) = \prod_{i=1}^I \sigma_i(s_i)$. Comme par ailleurs, on a déjà vu qu'à chaque profil s correspond un unique chemin sur l'arbre et donc, un unique profil de paiement $(u_1(s), u_2(s), ..., u_I(s))$, la probabilité $P(s)$ est aussi la probabilité que les joueurs obtiennent ce profil de paiements quand il joue effectivement le profil de stratégies mixtes σ. En répétant l'opération pour tous les profils stratégiques possibles $s = (s_1, s_2, ..., s_I) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_I$, on peut déterminer le paiement espéré de chaque joueur i compte tenu du profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_I)$:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s=(s_1,s_2,...,s_I)\in S_1\times S_2\times...\times S_I} P(s)\, u_i(s)$$

Outre le fait que l'on ait, au premier abord, quelque réticence à imaginer qu'un individu se soumette à un tirage aléatoire pour décider sa stratégie (après avoir tout de même lui-même choisi les dsitributions de probabilité sous-jacentes), la notion de stratégie mixte renferme un autre fait troublant. Quitte à accepter l'idée d'un tirage au sort, on est tout de même plus enclin à l'admettre en supposant que l'individu s'en remet à une série de tirages au sort au fur et à mesure des événements, plutôt qu'à un unique tirage "au début" du jeu, fixant définitivement sa stratégie pour toute la suite. En fait, Kuhn (1953) a montré que les deux sont équivalents dans un certain sens. Avant d'énoncer le théorème qui explicite et précise cette équivalence, nous devons présenter la notion de stratégie mixte de comportement.

La notion de stratégie mixte de comportement renvoie à l'idée de "tirage aléatoire de l'action au moment venu". Elle s'oppose à la notion de stratégie mixte, qui renvoie à l'idée de "tirage aléatoire d'une liste exhaustive d'actions pour chaque événement possible". Nous pouvons l'illustrer à l'aide d'un exemple :

- Stratégies mixtes :



Joueur 1 :

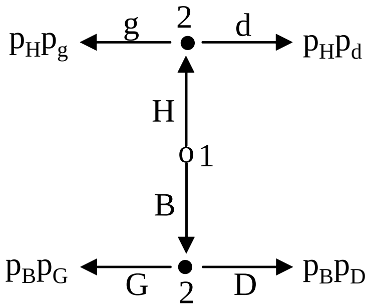
- $S_1 = \{H, B\}$ et $\sum_1 = \{p_H, p_B; p_H + p_B = 1\}$

Joueur 2 :

- $S_2 = \{gG, gD, dG, dD\}$ et $\sum_2 = \{p_{gG}, p_{gD}, p_{dG}, p_{dD}; p_{gG}+p_{gD}+p_{dG}+p_{dD} = 1\}$

On détermine les probabilités de chaque noeud terminal en fonction des stratégies mixtes des joueurs (cf. arbre).

- Stratégies mixtes de comportement :



Joueur 1 :

- $S_1 = \{H, B\}$ et $\sum_1 = \{p_H, p_B; p_H + p_B = 1\}$

Joueur 2 :

- $S_2^H = \{g, d\}$ et $\sum_2^H = \{p_g, p_d; p_g + p_d = 1\}$
- $S_2^B = \{G, D\}$ et $\sum_2^B = \{p_G, p_D; p_G + p_D = 1\}$

On détermine les probabilités de chaque noeud terminal en fonction des stratégies mixtes de comportement des joueurs (cf. arbre).

Il est évident que, pour tout profil de stratégies mixtes, caractérisé par les données $p_H, p_B, p_{gG}, p_{gD}, p_{dG}, p_{dD}$, il existe un profil de stratégie mixte de comportement, caractérisé par les données $p_H, p_B, p_g, p_d, p_G, p_D$, équivalent du point de vue de la distribution de probabilité sur les noeuds terminaux (il suffit de poser $p_g = p_{g.} = p_{gG} + p_{gD}$, etc., les conditions $p_g + p_d = 1$ et $p_G + p_D = 1$ étant automatiquement satisfaites), et réciproquement (même opération en sens inverse).

Le théorème de Kuhn établit ce résultat en toute généralité :

Pour un jeu sous forme extensive à mémoire parfaite, à toute stratégie mixte correspond une stratégie de comportement qui lui est équivalente. Pour toute stratégie de comportement mixte, il existe au moins une (et souvent plus d'une) stratégie mixte qui lui est équivalente. Equivaloir signifie "induire la même distribution de probabilité sur les issues du jeu" pourvu que l'on spécifie les stratégies de tous les joueurs.

Compte tenu de cette équivalence :

- on utilisera plus volontiers les stratégies mixtes pour prouver l'existence d'un équilibre du jeu ;

- on préférera les stratégies mixtes de comportement, plus maniable dans les jeu complexes, pour expliciter un équilibre du jeu.

Chapitre II

Concepts de solution d'un jeu non coopératif

Remarques préalables :

- le postulat de rationalité en théorie des jeux est plus fort, en général, qu'en économie. Non seulement, il faudra supposer toujours que l'agent est rationnel au sens habituel (cela suffit quand l'agent a une stratégie dominante), mais aussi, il faudra supposer qu'il devine le comportement des autres. Cette condition est plus ou moins exigeante selon le cas. Parfois, l'équilibre du jeu nécessite seulement que les joueurs soient rationnels et attribuent cette même rationalité aux autres ; dans d'autres circonstances, une chaîne de rationalité plus longue sera nécessaire : il faudra en plus que chaque joueur pense que les autres joueurs accordent cette rationalité aux autres, et ainsi de suite...

- en cas d'équilibres multiples, les joueurs sont incapables de prévoir l'issue du jeu, sauf à compléter la description du jeu : idée d'une solution naturelle et de convention ; communication. En toute rigueur, la communication entre les joueurs est exclue en théorie des jeux non coopératifs, sauf mention contraire. Cela ne signifie pas qu'on ne peut pas prendre en compte cette dimension, mais qu'elle doit, si l'on choisit de le faire, être intégrée explicitement dans l'arbre du jeu ou dans l'ensemble des stratégies.

1) Elimination successive des stratégies dominées (jeu sous forme normale).

Définition (critère de dominance stricte) : une stratégie d'un joueur domine strictement une autre si, quoique fassent les autres joueurs, ce joueur a un paiement strictement supérieur en utilisant cette stratégie.

On supposera qu'une stratégie dominée n'est pas jouée. Au cas où une stratégie domine toutes les autres, ces dernières étant éliminées, elle est donc jouée avec certitude. On parle alors de stratégie dominante.

Exemple :

			Joueur 2	
		$c1$	$c2$	$c3$
Joueur 1	$l1$	$(4,3)$	$(2,7)$	$(0,4)$
	$l2$	$(5,5)$	$(5,-1)$	$(-4,-2)$

Quelle que soit la stratégie du joueur 1 (l1 ou l2), le paiement du joueur 2 est supérieur si sa stratégie est c2 plutôt que c3. c2 domine c3, qui n'est pas jouée.

Si le joueur 1 pense que le joueur 2 est rationnel, il réduit alors le jeur de la manière suivante :

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(4, 3)$	$(2, 7)$
	$l2$	$(5, 5)$	$(5, -1)$

Dans ce jeu réduit, quelle que soit la stratégie de 2, le paiement du joueur 1 est plus grand quand il joue l2 plutôt que l1, qui n'est pas joué.

Si le joueur 2 pense que le joueur 1 est rationnel, il conclut que le joueur 1 joue sa stratégie dominante l2 dans le jeu réduit, et répond par la stratégie c1.

Commentaire : l'équilibre $(l2, c1)$ est risqué pour le joueur 1 s'il existe une petite chance que le joueur 2 ne soit pas rationnel et joue sa stratégie dominée c3. L'équilibre $(l2, c1)$ requiert donc une certaine confiance du joueur 1 sur le fait que son adversaire est rationnel (i.e. une certaine probabilité limite ; cf. Kreps).

Définition (critère de dominance par combinaison de stratégies): une combinaison de stratégies d'un joueur domine une autre stratégie de celui-ci si, pour toute stratégie de ses adversaires, on peut trouver une stratégie parmi la combinaison telle que le paiement du joueur est plus grand qu'avec la dernière.

On supposera qu'une stratégie dominée par combinaison de stratégies ne sera pas jouée.

Exemple :

			Joueur 2	
		$c1$	$c2$	$c3$
Joueur 1	$l1$	$(4, 10)$	$(3, 0)$	$(1, 3)$
	$l2$	$(0, 0)$	$(2, 10)$	$(10, 3)$

La combinaison $(c1, c2)$ domine c3 : si le joueur 1 joue l1, c1 est meilleure ; si le joueur 1 joue l2, c2 est meilleure. On élimine donc c3. Dans le jeu réduit, la stratégie l1 domine l2. Donc le joueur 1 ne joue pas l2. Alors le joueur 2 choisit la stratégie c1.

NB : au fur et à mesure des éliminations, on renforce l'exigence de l'hypothèse de rationalité.

Définition (critère de dominance faible): une stratégie d'un joueur domine faiblement une autre stratégie de celui-ci si elle fait aussi bien pour toute combinaison de stratégies de ses adversaires et mieux pour une de ces combinaisons.

L'élimination des stratégies faiblement dominées est problématique.

Exemple : en exercice

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(10, 0)$	$(5, 2)$
	$l2$	$(10, 1)$	$(2, 0)$

l1 domine faiblement l2. Si l2 est éliminée, la solution du jeu est $(l1, c2)$.

2) Dominance et forme extensive : l'algorithme de Kuhn.

Tout jeu fini à information complète et parfaite est soluble par dominance et par l'algorithme de Kuhn (au moins quand il n'y a pas d'ex aequo). Ceci est un des tout premiers résultats en théorie des jeux.

Précisons les termes :

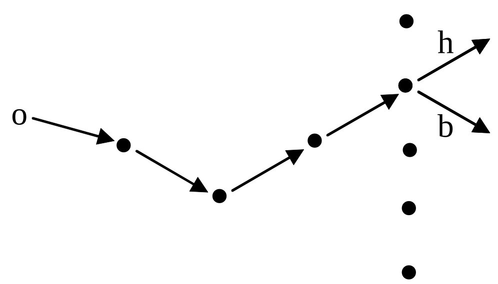
- un jeu est fini s'il comporte un nombre fini de noeuds ;

- un jeu à information complète et parfaite est un jeu sous forme extensive dans lequel chaque noeud est à lui seul un ensemble d'information.

Puisque le jeu est fini, il y a au moins un noeud terminal. Plaçons-nous au noeud précédent immédiatement ce dernier. Il est soluble par dominance :

- pour les stratégies des adversaires menant à ce noeud, on détermine l'action qui maximise l'utilité du joueur ;

- pour toutes les autres stratégies des adversaires, ne menant pas à ce noeud, ce choix est indifférent.



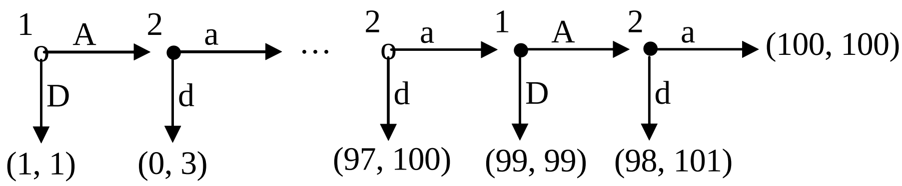
Sur le profil stratégique conduisant au noeud terminal, on détermine l'action qui maximise l'utilité : h ou b. Pour tous les autres profils stratégiques, cela n'a aucun effet sur l'utilité (h et b ne jouent pas).

- par application de la dominance faible, on peut éliminer toutes les stratégies du joueur considéré qui ne comporte pas l'action déterminé sur ce noeud : elles sont moins bonnes pour ce profil stratégique ; indifférentes pour tous les autres.

Une fois ce prédecesseur du noeud terminal résolu, on peut procéder de même sur son prédécesseur immédiat, et ainsi de suite. Ainsi, on parcourt l'arbre à rebours et on obtient un équilibre du jeu.

NB : on a supposé qu'il n'y avait pas d'ex aequo.

Exemple : le jeu du mille-pattes de Rosenthal



Plaçons-nous au prédécesseur du noeud terminal. C'est le joueur 2 qui y joue et doit choisir entre a et d. Pour que le jeur atteigne ce noeud, il faut que la stratégie de 1 soit AA...A (autant de fois qu'il a la main). Compte tenu de cette stratégie, la meilleure action de 2 est d. Par dominance faible, on peut donc éliminer toutes les stratégies de 2 terminant par un a au dernier sous jeu. En effet, la stratégie Xa est dominée faiblement par la stratégie Xd, quel que soit le profil X passé : si le joueur 1 joue la stratégie AA...A, l'utilité de deux est meilleure avec Xd qu'avec Xa ; elle est égale pour tous les autres profils stratégiques de 1 (X <>AA...A). Si le joueur 1 croît que le joueur 2 élimine toutes les stratégies terminant par a, il sait qu'au dernier noeud où il a la main, le paiement est (98, 100) s'il joue A, contre (99, 99) s'il joue D. Ce noeud devient lui-même soluble : toutes les stratégies de 1 terminant par A sont faiblement dominées par les stratégies de 1 se terminant par D. Et ainsi de suite.

L'équilibre du jeu est donc : DD... et dd....

NB : même si cela n'a aucun sens du point de vue du déroulement du jeu, par définition, une stratégie spécifie une action à chaque ensemble d'information. Ainsi, le profil DD... signifie arrêter le jeu à chaque fois qu'on a la main, même si de toute façon, le jeu s'arrête à la première fois où le joueur joue D. De même, une stratégie DAA... fait partie de l'ensemble des stratégies faisables, même si cela n'a aucun sens dans le jeu.

3) Equilibre de Nash

Le critère de dominance consiste à classer les stratégies d'un joueur les unes par rapport aux autres indépendamment des stratégies des autres (donc sans référence à l'idée d'interaction stratégique), puis à éliminer celles qui sont dominées. Ce critère est le plus souvent partiel, au sens où il ne classe pas toutes les stratégies prises deux à deux et ne permet pas d'en retenir une seule.

En pareil cas, il faudra recourir à d'autres arguments, et notamment tenir compte explicitement de l'interaction stratégique. On confrontera alors des profils stratégiques $s = (s_1, s_2, ..., s_I) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_I$ et on avancera des justifications pour affirmer que tel profil a plus de chances d'être joué par l'ensemble des joueurs, considérés isolément, que tel autre. Le concept d'équilibre de Nash participe de ce programme de recherche : au sens de Nash, une condition nécessaire pour qu'un profil de stratégies apparaissent comme une façon naturelle de jouer le jeu est qu'il soit dans l'intérêt de chaque joueur de jouer la stratégie qui lui est attribué dans ce profil de stratégies.

Définition (équilibre de Nash) : on dit que $\overline{s} = (\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_I)$ est un équilibre de Nash si pour chaque joueur i et chaque stratégie s_i dans S_i du joueur i, on a :

$$u_i(\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_I) \geq u_i(\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_{i-1}, s_i, \overline{s}_{i+1}, ..., \overline{s}_I)$$

Ce concept, défini pour les jeux sous forme normale, s'applique aussi aux jeux sous forme extensive : un profil de stratégies du jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash si et seulement si le profil de stratégies associés sous forme normale vérifie la condition ci-dessus. Noter tout de même que dans les jeux sous forme extensive, d'autres aspects doivent être pris en compte (cf. ci-dessous).

Exemple :

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(0,0)$	$(1,-1)$
	$l2$	$(-1,1)$	$(0,0)$

$(l1, c1)$ est un équilibre de Nash car $u_1(l1, c1) \geq u_1(l2, c1)$ et $u_2(l1, c1) \geq u_2(l1, c2)$. Il s'ensuit, réciproquement, que $(l2, c1)$ et $(l1, c2)$ ne sont pas des équilibres de Nash. Enfin, $(l2, c2)$ n'est pas un équilibre de Nash parce que, par exemple, $u_1(l1, c2) > u_1(l2, c2)$.

En fait, dans ce jeu, l1 et c1 sont des stratégies dominantes. D'une façon générale, on peut montrer qu'un équilibre d'un jeu obtenu par élimination des stratégies dominées est nécessairement un équilibre de Nash. Par contre, la réciproque n'est pas vraie (cela se conçoit car l'équilibre de Nash est un critère de solution moins restrictif).

Le concept d'équilibre de Nash suscite trois questions :

- à quelle condition un équilibre de Nash existe-t-il ?
- peut-il exister plusieurs équilibres de Nash et, si oui, qu'en faire ?
- suffit-il qu'un profil stratégique soit un équilibre de Nash pour qu'il soit joué ?

a) Existence de l'équilibre de Nash :

Cet exemple montre qu'il n'existe pas toujours d'équilibre de Nash en stratégies pures.

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	$l2$	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Néanmoins, on peut montrer qu'il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes. On a :

Joueur 1 :

- $S_1 = \{l1, l2\}$ et $\sum_1 = \{\sigma_1(l1), \sigma_1(l2)$; $0 \leq \sigma_1(l1) \leq 1$, $0 \leq \sigma_1(l2) \leq 1$ et $\sigma_1(l1) + \sigma_1(l2) = 1\}$

Joueur 2 :

- $S_2 = \{c1, c2\}$ et $\sum_2 = \{\sigma_2(c1), \sigma_2(c2)\ ;\ 0 \leq \sigma_2(c1) \leq 1,\ 0 \leq \sigma_2(c2) \leq 1$ et $\sigma_2(c1) + \sigma_2(c2) = 1\}$

On peut représenter dans le plan $(\sigma_1(l1), \sigma_2(c1))$ les ensembles de meilleures réponses des deux joueurs. Le paiement espéré du joueur 2 est :

$$\sigma_2(c1)(\sigma_1(l1)(-1) + (1 - \sigma_1(l1))(1)) \text{ (stratégie c1)}$$
$$(1 - \sigma_2(c1))(\sigma_1(l1)(1) + (1 - \sigma_1(l1))(-1)) \text{ (stratégie c2)}$$

soit, après simplification :

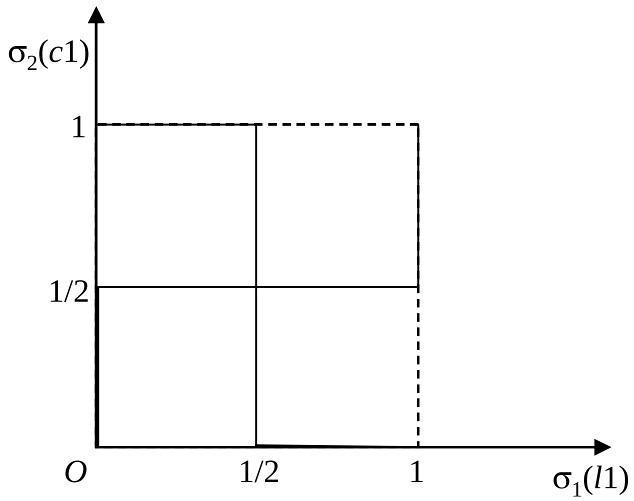
$$\sigma_2(c1)(\sigma_1(l1)(-1) + (1 - \sigma_1(l1))(1)) + \sigma_1(l1)(1) + (1 - \sigma_1(l1))(-1)$$

On définit donc la meilleure réponse de 2 :

$$\sigma_2(c1) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma_1(l1) > 1/2 \\ \in [0,1] \text{ si } \sigma_1(l1) = 1/2 \\ 1 \text{ si } \sigma_1(l1) < 1/2 \end{cases}$$

où la condition découle de $\sigma_1(l1)(-1) + (1 - \sigma_1(l1))(1) \lesseqgtr 0 \Longleftrightarrow \sigma_1(l1) \gtreqless 1/2$. De même, la meilleure réponse du joueur 1 est :

$$\sigma_1(l1) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma_2(c1) < 1/2 \\ \in [0,1] \text{ si } \sigma_2(c1) = 1/2 \\ 1 \text{ si } \sigma_2(c1) > 1/2 \end{cases}$$



Il existe un équilibre de Nash à l'intersection des ensembles de meilleure réponse, soit $\sigma_1(l1) = \sigma_2(c1) = 1/2$. Il convient de noter que, dans les équilibres en stratégies mixtes, ce sont les paiements des autres qui fixent les stratégies du joueur.

En généralisant cet exemple, Nash (1950) montre que tout jeu ayant un nombre fini de joueurs et de stratégies a au moins un équilibre de Nash, si on admet comme tels les équilibres en stratégies pures et mixtes.

b) Multiplicité des équilibres de Nash :

Il n'est pas rare qu'un jeu comporte plusieurs équilibres de Nash. Il se pose alors un problème de coordination (intimement lié au fait que les joueurs ne communiquent pas).

Prenons deux exemples :

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(0,0)$	$(20,40)$
	$l2$	$(40,20)$	$(0,0)$

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(10,10)$	$(0,0)$
	$l2$	$(0,0)$	$(1,1)$

Concernant la question du choix parmi plusieurs équilibres de Nash, on introduit des notions extérieures. Une convention est une manière de jouerun jeu en s'en remettant à des règles ou à des signaux arbitraires, i.e. sans effet sur le jeu : exemple des feux de signalisation, des systèmes numériques... La notion d'apprentissage est modélisée en théorie des jeux comme un ajustement de la stratégie en réponse au jeu moyen des adversaires sur les tours passés. Le concept de point focal renvoie à l'idée d'une coordination naturelle compte tenu de la description du jeu (c'est donc différent de la convention). Par exemple, $(l1, c1)$ dans le jeu de droite est une manière évidente de jouer, même sans communication.

c) cf. la prochaine section :

4) Raffinements de l'équilibre de Nash :

Etre un équilibre de Nash est une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour qu'un profil stratégique soit joué. Ceci incite, en fonction du contexte, à lui adjoindre d'autres conditions raisonnables.

a) Premier raffinement :

Dans les jeux sous forme normale, éliminer les équilibres de Nash qui comportent des stratégies faiblement dominées.

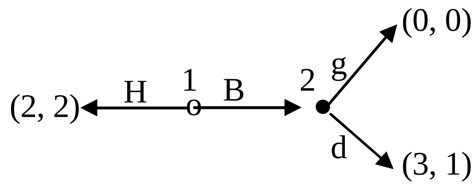
Voici un exemple :

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(10,0)$	$(5,2)$
	$l2$	$(10,11)$	$(2,0)$

Les équilibres de Nash sont $(l1, c2)$ et $(l2, c1)$. Mais, la stratégie $l1$ domine faiblement la stratégie $l2$. Il vaut mieux éliminer l'équilibre $(l2, c1)$. En effet, dès lors que le joueur 2 doute suffisamment du fait que le joueur 1 jouera effectivement $l2$, il sera tenter de dévier de l'équilibre de Nash $(l2, c1)$.

b) Equilibres parfaits en sous-jeux (et élimination des stratégies faiblement dominées) :

Soit le jeu suivant, sous forme extensive et sous forme normale :



		Joueur 2	
		g	d
Joueur 1	H	$(2,2)$	$(2,2)$
	B	$(3,1)$	$(0,0)$

Ce jeu comporte deux équilibres de Nash : (B, g) et (H, d). Comme la stratégie d est faiblement dominée, le second devrait être éliminé suivant le premier raffinement, mais gardons-le pour les besoins de la discussion.

On dit qu'un ensemble d'information de l'arbre est hors équilibre ou en dehors du chemin d'équilibre s'il n'est pas atteint quand le profil de stratégies d'équilibre considéré est joué. Par exemple, si le profil considéré est (H, d) dans le jeu ci-dessus, le noeud du joueur 2 n'est jamais atteint quand il est joué. On observe alors deux choses :

- le choix du joueur sur l'ensemble d'information hors équilibre laisse son paiement inchangé, si bien que toutes les actions disponibles à cet ensemble d'information peuvent indifféremment être éléments de la stratégie d'équilibre de Nash du joueur : ainsi, dans l'exemple, le noeud de 2 est hors équilibre pour (H, d) ; qu'il joue d ou g, sachant que l'autre joue H, cela ne modifie pas son paiement et peut être une stratégie d'équilibre de 2 ;

- néanmoins, même si le choix d'une action sur un ensemble d'information hors équilibre est non contraint pour le joueur qui y a la main, il peut être déterminant en ce qui concerne le choix des adversaires et donc sur la détermination du chemin d'équilibre : ainsi, si le joueur 2 choisit g au lieu de d pour le profil (H, d), certes son gain est identique, mais H n'est plus une stratégie d'équilibre pour le joueur 1.

D'une manière générale, on observe que les choix sur les noeuds hors équilibre sont indifférents pour le joueur, mais déterminants pour ses adversaires et, par conséquent, pour le chemin d'équilibre (ce constat est essentiel pour tous les raffinements de l'équilibre de Nash des jeux sous forme extensive, aussi bien en information complète qu'incomplète). C'est la raison pour laquelle il faut apporter un soin particulier à leur analyse, malgré le fait qu'ils ne seront en principe pas joués. L'astuce consiste précisément à imaginer que, bien que hors équilibre, ils puissent être malgré tout atteints. De la sorte, on contraint les joueurs concernés à y faire des choix raisonnables, puisqu'ils doivent alors en assumer, hypothétiquement, les conséquences. La notion de perfection en sous-jeux procède de ce raisonnement pour une classe particulière de jeux, où il existe des sous-jeux propres.

Définition d'un sous-jeu propre : un sous-jeu propre d'un jeu sous forme extensive est induit par un noeud unique t et ses successeurs $S(t)$ tels que t est un ensemble d'information à lui seul ($h(t) = \{t\}$) et les ensembles d'information associés aux successeurs de t sont des sous-ensembles de successeurs de t ($\forall t' \in S(t)$, $h(t') \in S(t)$).

Définition d'un équilibre de Nash parfait en sous-jeux : un équilibre de Nash parfait en sous-jeux est un équilibre de Nash du jeu qui, de plus, induit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux propres du jeu initial.

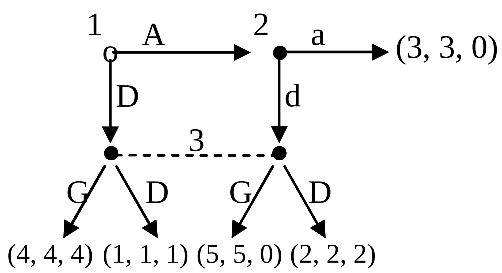
Appliquons ce raffinement au jeu précédent. Bien que le sous-jeu du joueur 2 soit hors équilibre pour l'équilibre de Nash (H, d), considérons le choix du joueur 2 en ce noeud. On voit que, si le jeu atteint ce noeud, alors le joueur 2 préfère l'action g à d ; la stratégie de comportement d n'est donc pas un équilibre de Nash du sous-jeu. On conclut que (H, d) n'est pas un équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

NB : éliminer les équilibres qui ne sont pas parfaits en sous-jeux revient à éliminer toutes les menaces non crédibles, c'est-à-dire qui ne serait raisonnablement pas mises à exécution le moment venu.

c) Equilibres séquentiels :

L'équilibre séquentiel généralise la perfection en sous-jeux pour le cas où on ne peut pas définir de sous-jeux propres.

Prenons un exemple :h



(D, a, G) est un équilibre de Nash :

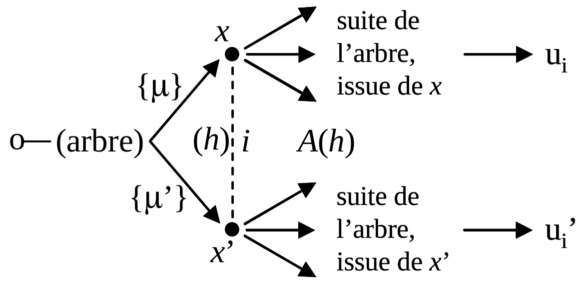
- sous la menace de a, le joueur 1 choisit la sécurité D ;
- le joueur 2 choisit une action hors-équilibre ;
- le joueur 3 sait que le joueur 1 joue D et choisit en conséquence G.

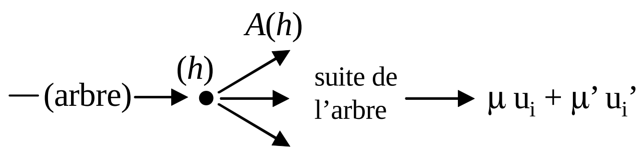
De même que précédemment, l'équilibre (D, a, G) est stabilisé par une action hors équilibre a qui est douteuse. En effet, si le joueur 2 anticipe que le joueur 3 jouera G et s'il avait la main, il jouerait d plutôt que a. Le joueur 1 aurait alors intérêt à jouer A. Finalement, se sachant sur le noeud de droite, le joueur 3 choisirait D. Ceci remettrait en cause le choix du joueur 2, qui reviendrait à a. Le joueur 1 choisirait A et on obtiendrait un nouvel équilibre de Nash (A, a, D).

Pour traiter ce type d'exemple, on utilise la notion d'équilibre séquentiel. Cette dernière s'appuie sur le concept de stratégie mixte de comportement. La stratégie d'un joueur est donc la donnée, en chacun des ensembles d'information où il a la main, d'une distribution de probabilité π_i sur l'ensemble des actions disponibles à cet instant. Un profil stratégique est donc un vecteur $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_I)$.

L'équilibre séquentiel fait aussi appel à un système de croyance μ qui, à chacun des ensembles d'information h du jeu, attribue une distribution de probabilité sur les noeuds qu'il contient : $\mu : X \rightarrow [0,1]$ tel que $\forall h \in H$, $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$.

En interprétant μ comme les croyances des joueurs et en utilisant le critère d'utilité espérée, on se ramène à quelque chose d'analogue à un sous-jeu propre, ce qui va nous permettre d'exploiter l'idée de perfection en sous-jeux :



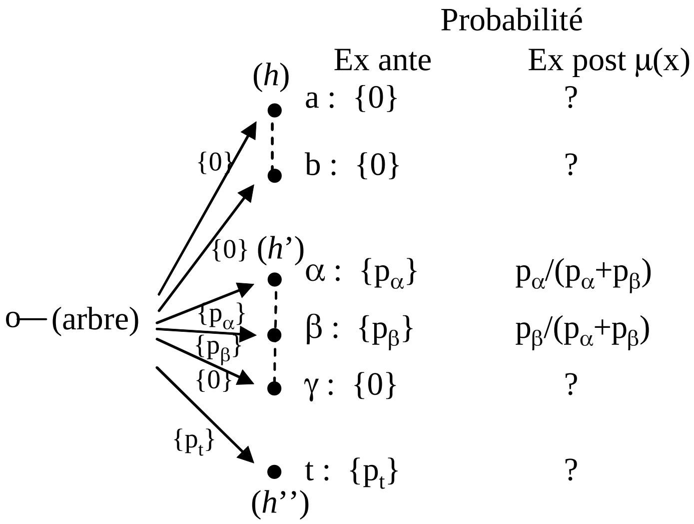


NB : $\mu + \mu' = 1$ et $u_i = u_i(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_I)$. Toute l'information pertinente jusqu'à h est contenue dans (μ, μ'). Pour la suite de l'arbre, même si ce n'est pas explicite, le paiement (u_i, u_i') dépend du profil stratégique π qui détermine les probabilités de chaque chemin jusqu'aux noeuds terminaux.

L'équilibre séquentiel impose la rationalité séquentielle, c'est-à-dire que chaque joueur joue une action optimale (ou une distribution de probabilité optimale sur les actions) en chacun de ses ensembles d'information, utilisant pour cela les croyances μ et le profil stratégique π.

La rationalité séquentielle ne définit pas complètement un équilibre séquentiel. Ceci provient du fait qu'elle n'explique pas comment se forment les croyances μ. En toute logique, elles devraient être déduites du profil stratégique π. En effet, ce dernier détermine, pour chaque chemin de l'arbre, la probabilité que ce chemin soit suivi, compte tenu des stratégies mixtes de comportement. Donc, chaque joueur peut calculer ex ante la probabilité que n'importe lequel de ses noeuds de décision soit atteint en utilisant le profil de stratégies mixtes de comportement π. Tous les noeuds ayant, sachant π, une probabilité nulle d'être atteints seront dits hors équilibre ; les autres seront sur le chemin d'équilibre.

Schéma : des noeuds du joueur i



Commentaire :

- p_α est la probabilité que le noeud soit atteint, calculé à partir de π. Sachant qu'il existe un chemin unique pour aller du noeud initial à α, qui nécessite qu'une suite d'actions $a \in A$ soit joué, on a $p_\alpha = \Pi_{a \in A} \Pr(a)$, où $\Pr(a)$ est tirée du profil stratégique π ;

- l'ensemble d'information h ne devrait pas être atteint, en principe, si le profil π est joué, car tous les noeuds de h ont une probabilité nulle d'être atteints. Si malgré tout, le joueur i observe que le jeu passe par h, ses croyances sont quelconques, puisqu'il ne dispose d'aucun élément pour les déterminer ;

- dans les ensembles d'information h' et h'', les joueur i peut utiliser la règle de Bayes pour déterminer ses croyances a posteriori, c'est-à-dire conditionnelles au fait d'atteindre h' ou h''. On divise la probabilité de chaque noeud de l'ensemble d'information par la probabilité totale de l'ensemble d'information.

En guise d'étape préparatoire à la définition de l'équilibre séquentiel :

Définition d'un équilibre bayésien (parfait) : un équilibre bayésien parfait est un couple $(\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_I), \mu)$, qui vérifie :

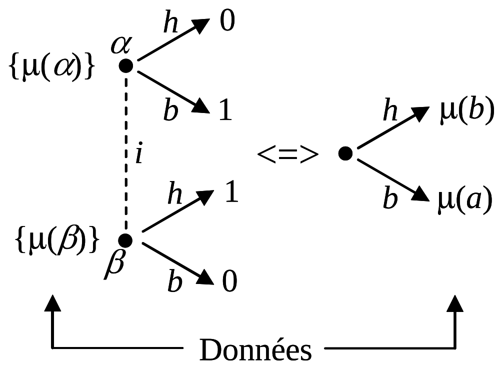
- la rationalité séquentielle (ou optimalité conditionnelle) : π_i maximise le paiement du joueur i en tout ensemble d'information où il a la main, sachant π et μ ;

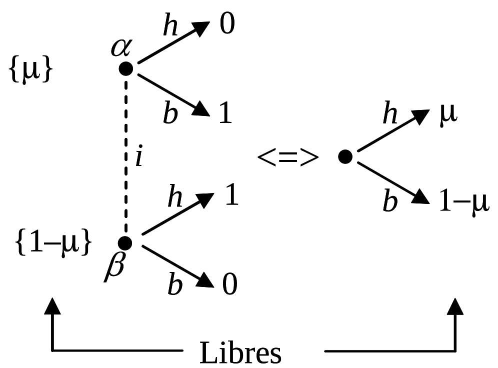
- la révision bayésienne des probabilités : μ est déduit de π en utilisant la règle de Bayes chaque fois que cela est possible ;

- sur les ensembles d'information hors équilibre, il existe des croyances qui rationalisent les stratégies correspondantes.

Dans cette définition, on doit noter que π est optimale sachant μ. Sur le chemin d'équilibre, μ est calculée à l'aide de la règle de Bayes. En dehors du chemin d'équilibre, μ est choisie de manière à rendre π optimale.

Exemple :





Dans cet exemple, on voit que le choix optimal est imposé sur le chemin d'équilibre, non contraint en dehors du chemin d'équilibre. Puisque c'est sans effet sur les paiements d'équilibre, le joueur peut jouer une stratégie de comportement sur un ensemble d'information hors équilibre pour stabiliser le chemin d'équilibre (cf. section précédente et exemples ci-dessous).

Pour limiter ce risque , l'équilibre séquentiel renforce les propriétés du profil d'équilibre : il faut que (π, μ) puisse s'exprimer comme la limite d'une suite (π_n, μ_n), où π_n est un profil de stratégies complètement mixtes (toute action de tout ensemble d'information a une probabilité strictement supérieure à zéro d'être jouée avec une stratégie complètement mixte) et μ_n est la croyance qui s'en déduit par l'application de la règle de Bayes en chaque ensemble d'information du jeu (ce qui est possible car tout ensemble d'information a une probabilité strictement positive d'être atteint avec des profils de stratégies complètement mixtes). Un profil (π, μ) qui vérifie cette propriété est dit consistant au sens de l'équilibre séquentiel.

Définition d'un équilibre séquentiel : un équilibre séquentiel est un couple (π, μ) qui vérifie :

- (π, μ) satisfait la rationalité séquentielle ;

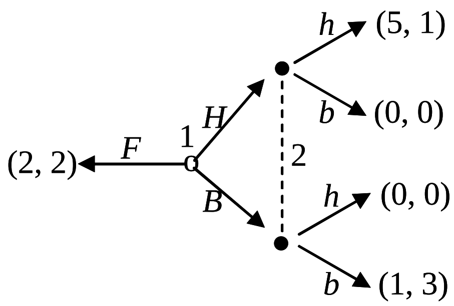
- (π, μ) est consistant.

On peut montrer que tout équilibre séquentiel est parfait en sous-jeux.

d) Restrictions sur les croyances hors-équilibres :

Un équilibre bayésien parfait et un équilibre séquentiel (les deux concepts sont assez proches) peuvent être stabilisés par des actions hors-équilibres rationalisées par des croyances peu raisonnables. Pour éviter cela, on est conduit à contraindre les croyances hors-équilibre à vérifier certaines propriétés raisonnables :

Exemple :



On montre que (F, b) est un équilibre Bayésien parfait. Le joueur 1 jouant F, les actions du joueur 2 sont hors équilibres. On peut rationaliser n'importe laquelle de ses actions en trouvant une croyance qui la soutient. Ainsi, soit μ la croyance du joueur 2 concernant l'événement "si le joueur 1 me donne la main, c'est qu'il a joué H". Alors, le joueur 2 a un paiement espéré μ s'il joue h, et $(1-\mu)\,3$ s'il joue b. Tant que $(1-\mu)\,3 > \mu$, soit $\mu < 3/4$, il est rationnel de choisir l'action b si, contre toute attente, le joueur 2 prenait la main. Cette croyance est consistante au sens de l'équilibre séquentiel : soit $\pi_n^1 = \left(\pi_n^F, \pi_n^B, \pi_n^H\right)_{n\in IN}$.une suite de stratégies complètement mixte du joueur 2 ; on a $\mu_n = \pi_n^H / \left(\pi_n^H + \pi_n^B\right)$, la croyance du joueur 2 sachant π_n^1. Or, dans l'ensemble des suites $\pi_n^1 = \left(\pi_n^F, \pi_n^B, \pi_n^H\right)_{n\in IN}$ convergeant vers $(1,0,0)$, il en est une telle que $\mu_n < 3/4$ pour tout i. Alors, la croyance $\mu < 3/4$ est consistante avec la stratégie ; $\pi^1 = (1,0,0)$ et (F, b) est un équilibre séquentiel.

A l'évidence, la croyance $\mu < 3/4$ soutenant l'équilibre (F, b) n'est pas raisonnable. On imagine mal que le joueur 1, qui peut s'assurer un paiement égal à 2 en jouant F, choisisse B, qui lui donne au mieux un paiement de 1. Au contraire, H semble assez raisonnable. Mais alors, $\mu \sim 1$ est raisonnable et (F, b) ne devrait pas être retenu comme équilibre.

En généralisant l'argument, on considérera comme non raisonnable et attribuera une croyance hors équilibre nulle :

1) à toute action strictement dominée (quel que soit le profil stratégique des autres joueurs) par une action concurrente (au sens où le fait de la jouer dispense de devoir jouer la première, en met à l'abris) ;

2) à toute action dominée à l'équilibre (pour le profil de stratégies d'équilibre des autres joueurs) par une action concurrente (id.).

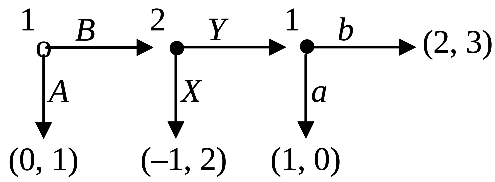
Ces test de domination porte le nom de "critère intuitif".

e) Equilibre parfait de main tremblante

Le soin apporté à l'analyse des actions sur le chemin hors-équilibre prend tout son sens avec la notion de "main tremblante". L'idée sous-jacente est que les joueurs décident leur stratégie mais commettent des erreurs dans leur exécution. Pour exploiter cette idée, il faut préciser la technologie des erreurs :

- erreur négligeable : les stratégies exécutées sont dans une certain voisinage des stratégies planifiées ;
- perception commune des erreurs : les joueurs anticipent les mêmes erreurs ;
- les erreurs sont indépendantes (certains modèles généralisent aux erreurs corrélés) ;
- les erreurs sont ou non fonction des enjeux (Selten, 1975 : erreurs indépendantes des enjeux ; Myerson, 1978 : erreurs inversement proportionnelles aux enjeux) ;
- distinction entre la forme normale et la forme extensive : le concept d'équilibre parfait de main tremblante est défini pour les formes normales. Ceci pose une difficulté formelle puisque le joueur se trompe une fois dans l'exécution de sa stratégie, alors que dans la forme extensive du jeu, il a plusieurs possibilités indépendantes de se tromper :

		Joueur 2	
		X	Y
Joueur 1	A	$(0,1)$	$(0,1)$
	Ba	$(-1,2)$	$(1,0)$
	Bb	$(-1,2)$	$(2,3)$



Dans la forme normale, si A est la stratégie choisie par le joueur 1, il commet apparemment une erreur du même ordre en choisissant Ba ou Bb. Pourtant, dans la forme extensive, il apparaît que, B ayant été joué par erreur, ce serait une erreur supplémentaire de jouer a plutôt que b au dernier noeud. Ainsi, dans la forme normale, la technologie des erreurs rend aussi probable Bb que Ba, alors que Ba est une erreur d'ordre 2 et devrait être très improbable (si ε est la probabilité de se tromper à un noeud ayant deux successeurs, Bb a la probabilité ε et Ba a la probabilité ε^2).

Un moyen pour réconcilier les deux formes, du point de vue des technologies d'erreurs, est de construire la forme normale des agents équivalente à la forme extensive : fictivement, chaque joueur du jeu initial est scindé en autant d'agents d'exécution que d'ensembles d'information où le joueur intervient dans la forme extensive. Chaque agent intervient en un unique ensemble d'information, et se trompe de manière indépendante. L'utilité de l'agent est égale à l'utilité du joueur initial.

Définition d'un équilibre parfait de main tremblante : un équilibre de Nash est un équilibre parfait de main tremblante si, dans la forme normale des agents, il existe pour tout joueur i une suite $\left(\pi_n^i\right)_{n \in IN}$ de stratégies complètement mixtes telle que :

- la suite des erreurs converge vers une stratégie limite π^i pour tout i : $\lim \left(\pi_n^i\right) = \pi^i$;

- pour tout i, la stratégie limite π^i est la meilleure réponse à tout profil de stratégies $\pi_n^{-i} = \left(\pi_n^1, \pi_n^2, ..., \pi_n^{i-1}, \pi_n^{i+1}, ..., \pi_n^I\right)$, pour tout n.

On peut montrer que tout équilibre de Nash parfait de main tremblante d'un jeu sous forme extensive est un équilibre séquentiel.

Chapitre III

Jeux répétés

1) Présentation de la notion de jeux répété

Le point de départ d'un jeu répété est un jeu constitutif J sous forme normale. Rappelons qu'un tel jeu implique de définir l'ensemble des joueurs I, l'ensemble des stratégies de chaque joueur S_i, le paiement u_i de chaque joueur pour tout profil de stratégies dans $S_1 \times S_2 \times ... \times S_I$.

Exemple : $I = \{1, 2\}$, $S_1 = \{l1, l2\}$ et $S_2 = \{c1, c2\}$. Les paiement sont donnés par la matrice :

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(2,2)$	$(-1,3)$
	$l2$	$(3,-1)$	$(0,0)$

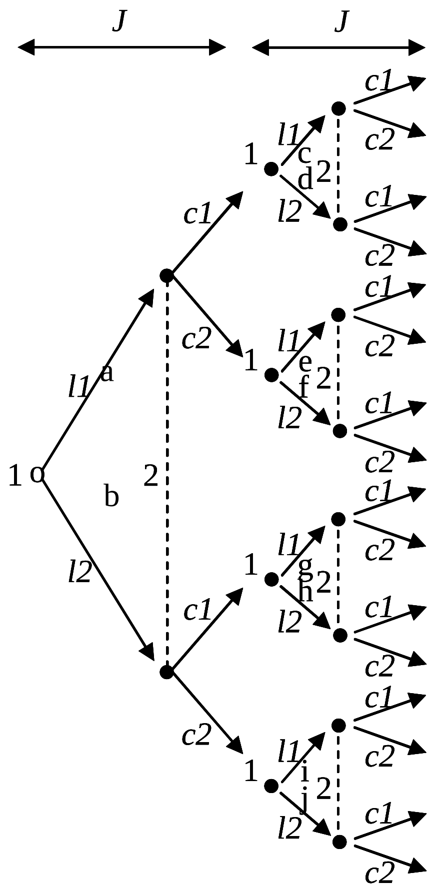
Ce jeu bien connu est celui du dilemme du prisonnier. $l2$ et $c2$ sont des stratégies de dénonciation ; $l1$ et $c1$ sont des stratégies de silence. Les paiement sont déterminés pour forcer les deux voleurs à se dénoncer mutuellement. Ainsi, on montre que $l2$ est une stratégie strictement dominante : si le joueur 2 joue $c1$, le joueur 1 est libéré et en jouant $l2$ (dénoncer), il garde le butin, alors qu'en jouant $l1$, il devrait le partager ; si le joueur 2 joue $c2$, il est dénoncé, mais en jouant $l2$ plutôt que $l1$, sa peine est commuée en une peine plus courte. Comme le jeu est symétrique, $(l2, c2)$ est équilibre du jeu en stratégies dominantes, alors qu'il est dominé au sens de Pareto par $(l1, c1)$.

Ce jeu est très important en économie car il s'y rencontre fréquemment dans des contextes variés : duopole, commerce stratégique, pollution, bien public...

Le jeu du dilemme du prisonnier ne convient pas quand on veut décrire une situation réelle où la relation, quoique proche du dilemme du prisonnier, est répétée plusieurs fois. Certaines expérimentations montrent que, tant que les joueurs n'entrevoient pas de terme certain à la répétition, on observe une coopération, i.e. $(l1, c1)$.

Pour étudier ce type de situations, on construit un jeu J^T, qui consiste en la répétition T fois du jeu constitutif J. Lorsque T est fini, le jeu est un jeu répété à horizon fini ; sinon, le jeu est à horizon infini.

La définition proposée ne rend pas bien compte de la forme et de la nature du jeu ainsi construit. Afin de mieux les saisir, nous pouvons proposer une représentation sous forme extensive du jeu répété deux fois :



Commentaires :

- les jeux constitutifs sont simultanés, i.e. ni le joueur 1, ni le joueur 2 ne savent ce que l'autre fait à ce tour, avant de joueur lui-même ;
- le jeu répété est à mémoire parfaite, i.e. chaque ensemble d'information comporte au plus deux noeuds (associé au jeu constitutif simultané) ;
- une stratégie du jeu est la donnée d'une action en chaque ensemble d'information. Par exemple :

				histoires	
	c			$l1c1$	$l1$
	e	$\Longleftrightarrow$		$l1c2$	$l1$
a	h		$l1$	$l2c1$	$l2$
	j			$l2c2$	$l2$

Ces deux écritures sont équivalentes. Elles montrent bien qu'il est commode de renommer les actions en chaque ensemble d'information. Toutefois, cette convention ne peut pas être conservée dans les jeux répétés (vite envahissant). A la place, on préfère l'écriture hs_i où h est l'histoire du jeu qui a conduit jusqu'à l'ensemble d'information considéré (h est le parcours d'une branche de l'arbre) et s_i est une stratégie du jeu constitutif J que le joueur doit choisir dans S_i pour cet ensemble d'information. Sous cette forme, une stratégie du joueur est donc la donnée d'un élément s_i de S_i pour chaque histoire possible du jeu. Ainsi, on obtient l'écriture équivalente aux deux précédentes :

$$\Longleftrightarrow \quad \varnothing l1 \quad \begin{array}{cc} \text{histoires} & \\ h_{11} & l1 \\ h_{12} & l1 \\ h_{21} & l2 \\ h_{22} & l2 \end{array}$$

où, au noeud initial, il n'y a pas encore d'histoire, et aux noeuds suivants, il y a quatre histoires possibles.

- l'ensemble des stratégies du jeu répété est donc l'ensemble engendré par l'application qui, à chaque élément de l'ensemble des histoires possibles H associe une stratégie du jeu constitutif s_i prise dans l'ensemble S_i : $H \to S_i, h \to s_i$. Il faut bien comprendre que cette définition englobe toutes les histoires imaginables, quel que soit le nombre de tours entre 0 et T et y compris des histoires qui sont normalement impossibles compte tenu de la stratégie du joueur i (voir exemple, où le joueur 1 joue $l1$ après l'hitoire $\varnothing$, mais envisage tout de même les histoires h_{21} et h_{22} ensuite, qui pourtant nécessitent qu'il joue $l2$ au premier tour) ;

- une description complète du jeu nécessite de spécifier les paiements en chacun des noeuds terminaux. Ceci implique de doter les joueurs d'une relation de préférence par laquelle il ordonne toutes les histoires terminales possibles du jeu. Evidemment, ces préférences devraient être reliées au jeu constitutif (sans quoi on ne voit pas pourquoi on y ferait référence). De façon très générale, on choisit une relation de préférence telle que, si le joueur choisit entre deux histoires qui diffèrent en un seul ensemble d'information, ils les ordonnent conformément à ses préférences dans le jeu constitutif ainsi isolé. Cette hypothèse est minimale et, en général, on spécifie beaucoup plus précisément. De façon générale, on considère les paiements suivants :

	Horizon fini	Horizon infini
Paiement moyen	$\frac{\sum_{t=1}^{T} u_i(t)}{T}$	$\liminf\limits_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^{T} u_i(t)}{T}$
Paiement actualisé	$\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(t)$	$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(t)$
Paiement espéré	$\sum_{t=1}^{T} q^{t-1} u_i(t)$	$\sum_{t=1}^{\infty} q^{t-1} u_i(t)$

avec $\delta \in [0,1]$ le facteur d'actualisation et $q \in [0,1]$ la probabilité qu'il y ait un tour suivant.

2) Jeux répétés à horizon fini :

Intuitivement, on peut comprendre que la "coopération" soit jouée quand le jeu est répété. Il suffit que j'anticipe que tout manquement de ma part à cette règle sera puni à l'avenir par mes adversaires, et que la punition soit suffisamment sévère, pour que je sois dissuadé de le faire. En fait, comme nous allons le voir, cette logique ne fonctionne pas dans les jeux à horizon fini, précisément parce qu'elle est minée par l'échéance de la fin du jeu où, faute de poursuite de la relation, aucune représaille n'est plus possible et où, inéluctablement, la logique du dilemme du prisonnier reparaît.

Avant d'énoncer formellement ce résultat, définissons le paiement de minimax d'un joueur quelconque comme le paiement minimum qu'il parvient à sauver quand les autres joueurs agissent de telle manière que son paiement soit le plus petit possible :

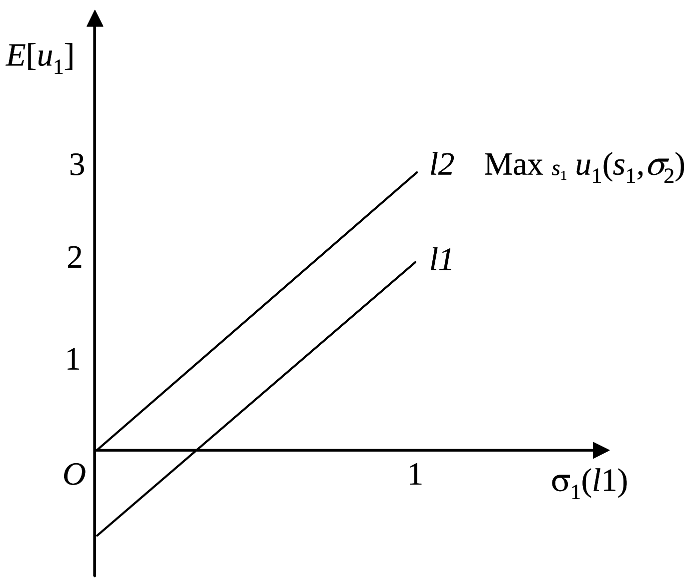
$$\underline{v_i} = \min_{(\sigma_1,...,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},...\sigma_I)} \max_{s_i} \quad u_i\left(\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, s_i, \sigma_{i+1}, ...\sigma_I\right)$$

Exemple : Dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		$c1$	$c2$
Joueur 1	$l1$	$(2,2)$	$(-1,3)$
	$l2$	$(3,-1)$	$(0,0)$

Soit $\sigma_2(c1)$ et $\sigma_2(c2) = 1 - \sigma_2(c1)$ la stratégie mixte ou pure du joueur 2. Le paiement espéré du joueur 1 est :

$$E[u_i] = \begin{cases} \sigma_2(c1)(2) + (1 - \sigma_2(c1)(-1)) \text{ si } l1 \\ \sigma_2(c1)(3) \text{ si } l2 \end{cases}$$



Dans cet exemple, on a donc $\underline{v_i}= 0$. Dans le jeu du dilemme du prisonnier, le paiement minimax du joueur correspond à l'issue de non coopération $(l2, c2)$.

Ayant défini ce concept, on peut énoncer le résultat suivant :

Si tous les équililibres de Nash du jeu constitutif J donnent à chaque joueur un paiement égal à son paiement de minimax, alors tous les équilibre de Nash du jeu J^T (répétition T fois du jeu constitutif J) sont une succession d'équilibre de Nash du jeu constitutif.

La logique qui conduit à ce résultat est simple et implacable. Considérons un profil stratégique $s^T = \left(s_1^T, ..., s_T^T\right)$ du jeu répété. Il décrit de manière exhaustive les stratégies adoptées par tous les joueurs aux tours $1...T$ respectivement. Supposons que s^T est un équilibre de Nash du jeu répété. Dans ce profil, il y a a priori des tours où s_t^T est un équilibre de Nash du jeu constitutif, d'autres où ce n'est pas le cas. Soit τ la date minimale à partir de laquelle tous les coups suivants, réglés par s^T, sont des équilibres de Nash du jeu constitutif :

	1	…	τ-2		τ-1	τ	…	T
s^{T}	←	quelconque	→	(*) pas Eq. de Nash de *J*		←	Eq. de Nash de *J*	→

(*) : car τ est la première date à partir de laquelle on ne joue que des équilibres de Nash du jeu constitutif.

Puisqu'en $\tau - 1$, la stratégie du jeu répété J^T prescrit un profil que n'est pas un équilibre de Nash du jeu constitutif J, il existe au moins un joueur qui peut dévier en $\tau - 1$ de sa stratégie donnée par s^T et accroître ainsi son paiement (par définition) (il conserve la même stratégie, sauf en $\tau - 1$, sinon). De plus, il ne peut pas être sanctionnéaux tours suivants, puisque, par hypothèse, c'est une répétition d'équilibre de Nash de J où le joueur obtient son paiement minimax.

Ex : le dilemme du prisonnier est un tel jeu. Il possède un unique équilibre de Nash et satisfait donc à la condition de la proposition (tous les équilibres de Nash donnent un paiement égal à son paiement de minimax). Il s'ensuit que, peu importe le nombre de répétition T, à condition qu'il soit fini et clairement connu des joueurs, l'équilibre du jeu J^T au sens de Nash implique la répétition T fois de l'équilibre de Nash de J, soit $(l2, c2)$.

Evidemment, le fait de considérer des équilibres parfaits en sous-jeux ne change rien à l'affaire. Par définition, un équilibre parfait en sous jeux est un équilibre de Nash en chaque sous-jeu propre du jeu. Or, dans le jeu répété, tout sous-jeu propre est une répétition un nombre fini de fois du jeu constitutif, dont on vient de montrer que, sous certaines conditions, un équilibre de Nash est une succession d'équilibres de Nash du jeu constitutif. Donc, par récurrence à rebours, on conclut que, dans les mêmes conditions que précédemment (tous les équilibres de Nash de J induisent un paiement égal au minimax), tout équilibre parfait en sous-jeux de J^T est une succession d'équilibre de Nash du jeu constitutif J.

3) Jeux répétés à horizon infini

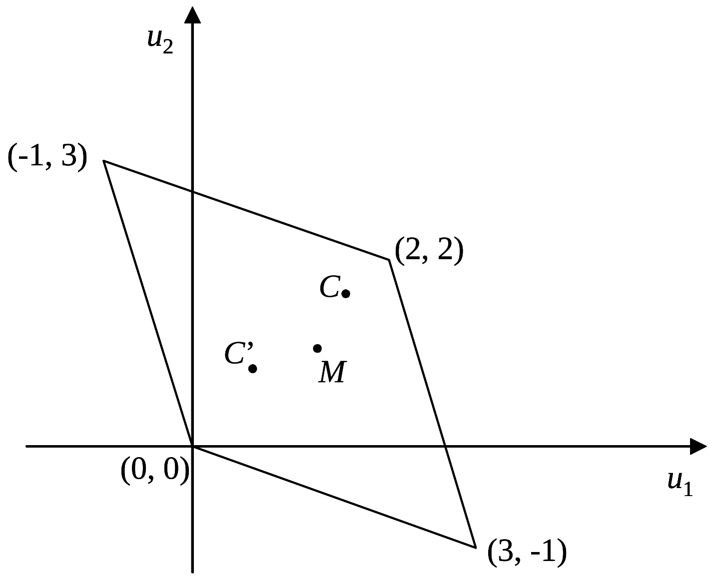
Si l'horizon du jeu est infini ou si, de façon plus acceptable, les agents croient qu'il ne s'arrête jamais avec certitude, des représailles suffisamment dissuasives pour le joueur fautif sont toujours possibles ; il suffit de sanctionner suffisamment longtemps. Donc, il est possible de soutenir, au moyen de telles dissuasions convenablement choisies, n'importe quel comportement assurant, au moins, à chaque joueur, un paiement équivalent à son paiement de minimax. Tel est, pour l'essentiel, l'argument et le résultat du Folk theorem. Il tire son nom du fait qu'il a force d'évidence et que, par voie de conséquence, il n'a jamais été énoncé ni prouvé par quiconque en particulier, mais plutôt par tout le monde à la fois.

Commençons par caractériser l'ensemble des paiements faisables. Que ce soit en jouant des stratégies mixtes ou en alternant suivant des cycles variables de stratégies pures au cours du temps, n'importe quel couple de paiements espérés ou moyens éléments de l'ensemble :

$$\left\{ \begin{array}{c} (\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \sigma_1\sigma_2\,(2,2) + (1-\sigma_1)\,\sigma_2\,(3,-1) + \sigma_1\,(1-\sigma_2)\,(-1,3) \\ +\,(1-\sigma_1)\,(1-\sigma_2)\,(0,0)\,;\sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ entre 0 et 1 et de somme égale à 1} \end{array} \right\}$$

est possible, où :

- σ_i est la probabilité que le joueur i joue sa stratégie coopérative où la fréquence avec laquelle il la joue au cours d'une période donnée (par exemple, si $\sigma_1 = 3/4$, la stratégie du joueur 1 consiste en des cycles de quatre périodes pendant lesquels il joue trois fois $l1$ et une fois $l2$) ;
- les paiements sont issus de la matrice du dilemme du prisonnier.



Représentation graphique de l'ensemble des paiements faisables en utilisant des stratégies mixtes ou des stratégies alternées. C'est l'ensemble des combinaisons convexes $\sigma_1\sigma_2\,(2,2) + (1-\sigma_1)\,\sigma_2\,(3,-1) + \sigma_1\,(1-\sigma_2)\,(-1,3) + (1-\sigma_1)\,(1-\sigma_2)\,(0,0)$.

On obtient ainsi l'ensemble des points délimités par $(0,0)$, $(2,2)$, $(3,-1)$ et $(-1,3)$.

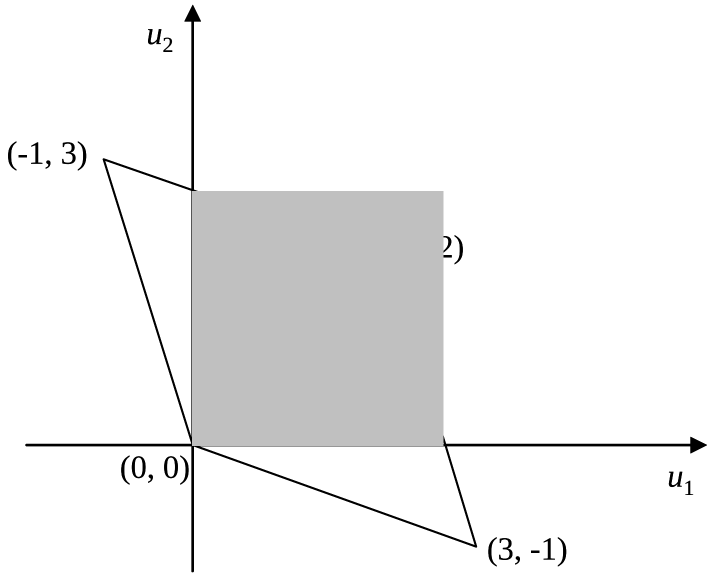
Considérons maintenant un point quelconque C de cet ensemble. On sait que l'on peut construire un profil stratégique du jeu répété à horizon infini J^{∞} tel que, si les joueurs le suivent, ils auront le paiement associé (dans la version $\liminf\limits_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T}u_i(t)}{T}$). En effet, à ce point, on peut associer un couple (σ_1,σ_2) unique spécifiant la fréquence à laquelle chaque joueur est censé jouer sa stratégie coopérative sur le chemin de l'arbre du jeu ainsi fixé. σ_i peut toujours s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible p/q où p et q sont des entiers. La stratégie de i consiste donc à suivre des cycles de q périodes pendant lesquels ils jouent sa stratégie coopérative p fois.

De la sorte, on peut construire des chemins dans l'arbre J^{∞} donnant aux joueurs en moyenne un gain quelconque issu de l'ensemble précédent. Il nous reste à vérifier si ce chemin peut être un chemin d'équilibre. En retenant le critère d'équilibre de Nash sur le jeu pris comme un tout, il suffit de vérifier qu'il existe des stratégies en dehors du chemin retenu susceptible de dissuader les joueurs de s'en écarter.

Il existe une infinité de menaces possibles. Par exemple, le point M, (et les stratégies sous-jacentes associées à M) est une menace suffisante pour dissuader les deux joueurs de dévier du chemin C (s'ils croient que la menace M sera effectivement mise à exécution). Par contre, cette menace est inopérante si le chemin considéré est celui associé au point C' (et les stratégies associées). Cet exemple permet de comprendre que, pour déterminer tous les points et les chemins qui peuvent être soutenus par une menace (sur le chemin hors équilibre), il faut prendre en compte la menace la plus sévère possible. Or, par définition, la menace la plus sévère que puissent prendre les autres joueurs à l'encontre d'un joueur donné est celle qui lui donne son paiement minimax, soit 0 dans notre exemple. La stratégie correspondante est celle qui consiste à jouer non coopératif pour toujours, dès lors que le joueur s'écarte une fois du chemin considéré. On est désormais en mesure d'énoncer le Folk theorem dans le cas où le paiement du jeu répété à horizon infini est la moyenne des paiements sur le chemin de l'arbre.

Folk theorem (cas $\liminf\limits_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T}u_i(t)}{T}$) : tout profil de paiement faisable et supérieur au paiement minimax peut être obtenu par au moins un (et en général plusieurs) profil stratégique qui soit un équilibre du jeu J^{∞} (pour la mesure du paiement retenu).

L'ensemble ainsi mis en évidence correspond à la zone grisée du graphique. Quel que soit le point de cet ensemble, donnant $(u_1,u_2)\geq(\underline{v_1},\underline{v_2})$, une déviation à une date quelconque t par un joueur quelconque i implique de renoncer au paiement moyen u_i pour obtenir le paiement $\liminf\limits_{T\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{t-1}u_i+\overline{u_i}+\sum_{i=t+1}^{\infty}\underline{v_i}}{T}=\underline{v_i}\leq u_i$ (où $\overline{u_i}>u_i$ est l'avantage que retire le joueur i de la déviation à la date t) si la menace de l'autre de joueur non coopératif indéfiniment est suivie d'effet. La stratégie sous-jacente est donc optimale. Par contre, tout profil stratégique donnant à un joueur moins que son paiement minimax $\underline{v_i}$ n'est pas un équilibre de Nash. Ceci élimine les zones non grisées du graphique.



L'équivalent du théorème précédent peut être obtenu lorsque la mesure du paiement du jeu répété à horizon infini est la somme actualisée des paiements le long du chemin de l'arbre. Toutefois, une condition doit être imposée sur la valeur du taux d'actualisation.

Folk theorem (cas $\liminf\limits_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(t)$) : tout profil de paiement faisable et supérieur au paiement minimax peut être obtenu par au moins un (et en général plusieurs) profil stratégique qui soit un équilibre du jeu J^{∞} et pour un ensemble de taux d'actualisation suffisamment proche de 1.

Considérons un profil $(u_1, u_2) \geq (\underline{v_1}, \underline{v_2})$. Soit une déviation du joueur i à une date t quelconque. Son paiement est $\sum_{i=1}^{t-1} \delta^{i-1} u_i + \delta^{t-1}\overline{u_i} + \sum_{i=t+1}^{\infty} \delta^{i-1} \underline{v_i}$ au liieu de $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} u_i$. La déviation est dissuadée si:

$$\begin{aligned}
\delta^{t-1}\left(u_i - \overline{u_i}\right) + \sum_{i=t+1}^{\infty} \delta^{i-1}\left(u_i - \underline{v_i}\right) &= \delta^{t-1}\left(\left(u_i - \overline{u_i}\right) + \delta \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1}\left(u_i - \underline{v_i}\right)\right) \\
&= \delta^{t-1}\left(\left(u_i - \overline{u_i}\right) + \frac{\delta}{1-\delta}\left(u_i - \underline{v_i}\right)\right) \geq 0
\end{aligned}$$

ce qui revient à poser la condition :

$$\delta \geq \frac{\overline{u_i} - u_i}{\overline{u_i} - \underline{v_i}}$$

Les deux Folk theorems précédents reposent sur le critère d'équilibre de Nash. Il s'ensuit qu'ils sont stabilisés par des stratégies hors équilibre libres ;

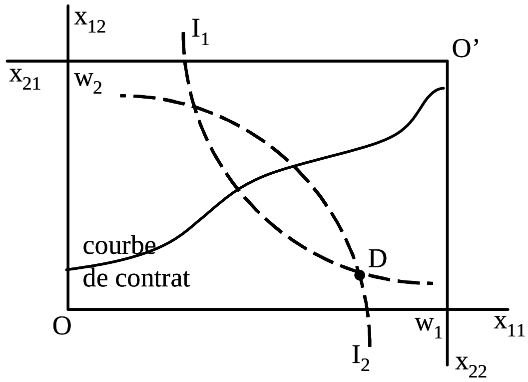
plus précisément, elles sont spécifiées de telle sorte qu'elles supportent le plus de paiements faisables possibles. Ceci suffit au sens de l'équilibre de Nash, où les joueurs n'auront jamais à appliquer ces stratégies de minimax contre les joueurs déviants. Mais cela n'est pas suffisant pour la description de situations réelles, où diverses circonstances peuvent faire quitter l'équilibre et où la crédibilité des stratégies doit être éprouvée aussi bien sur le chemin d'équilibre qu'en dehors du chemin d'équilibre. On utilise alors le critère d'équilibre parfait en sous-jeux (un profil stratégique est un équilibre parfait en sous-jeux si il est un équilibre de Nash de chaque sous-jeu propre). Or, il s'avère que la sanction considérée dans les solutions précédentes (jouer des stratégies minimax indéfiniment) ne sont pas crédibles.

Néanmoins, les stratégies hors-équilibre précédentes peuvent toujours être modifiées de telle manière que des versions du Folk theorem soient obtenues en équilibre parfait en sous-jeux. Dans ces versions, la stratégie punitive hors-équilibre consiste à jouer les stratégies minimax contre le joueur déviant un nombre de tours juste suffisants pour qu'il en soit dissuadé, après quoi elles reviennent sur le chemin d'équilibre.

Chapitre IV

Marchandage entre deux parties

Le problème du marchandage ou du monopole bilatéral (quand les deux fixent le prix) est bien posé par Edgeworth. Deux agents, caractérisés par leur préférence (courbes d'indifférences I_1 et I_2) et leur dotation initiale (le point D dans la boîte d'Edgeworth) sont en mesure d'améliorer leur bien-être en négociant un contrat d'échange entre eux, stipulant simultanément les quantités échangées, les termes d'échange et le partage des bénéfices (ces informations étant liées entre elles). Jusqu'à très récemment, les économistes avaient peu de choses à dire à ce sujet (Stigler : "indétermination fondamentale du monopole bilatéral") :



- tout contrat C à l'intérieur de l'ensemble délimité par les courbes d'indifférence passant par le point D est individuellement rationnel ;

- tout contrat C qui n'est pas sur la courbe de contrat, c'est-à-dire sur le lieu des points de tangence des courbes d'indifférence, n'est pas collectivement rationnel (par définition de la courbe de contrat, C peut être amélioré pour un individu sans pénaliser l'autre).

Au total, il semble raisonnable de garder comme ensemble de solutions possibles la partie de la courbe de contrat dans l'ensemble individellement rationnel. Pour le reste, à savoir le choix d'un point dans cet ensemble infini, on utilisait la notion vague de pouvoir de négociation.

C'est Nash (1950, 1953) qui permit les premières justifications endogènes de telle ou telle solution dans l'ensemble ainsi délimité. Il ouvre en fait deux pistes complémentaires. L'approche axiomatique propose de déduire la solution à partir de propriétés jugées raisonnables pour celle-ci (ce que nous avons commencé ci-dessus). L'approche stratégique entend quant à elle prédire l'issue de la négociation en tenant compte du protocole de la négociation et du postulat de rationnalité seulement. Elle renvoie donc à la théorie des jeux non-coopératifs. On appelle programme de Nash la tentative de compléter les deux approches et de les relier de façon convaincante.

1) Approche axiomatique (Nash, 1950)

Nash pose les axiomes suivants :

- rationalité individuelle : puisque le joueur peut s'assurer d'un paiement de réservation en quittant la table de négociation, toute solution doit garantir au moins cela à chaque joueur ;

- Pareto optimalité : si les joueurs ne sont ni envieux ni altruistes (seul compte leur fonction d'utilité, mais pas le niveau d'utilité des autres), toute solution non optimale au sens de Pareto est déraisonnable ;

- symétrie : la solution ne doit dépendre que des caractéristiques intrinsèques des joueurs (leur préférence et leur dotation), mais pas de leur identité. Elle vérifie la propriété d'invariance par permutation des rôles ;

- invariance par changement d'échelle : si l'utilité est ordinale et non comparable entre les individus, si elle vérifie les axiomes de la théorie de l'utilité espérée, alors elle est définie à une transformation affine strictement croissance près. Dès lors, l'ensemble des fonctions d'utilité $\overline{u}_i = \{au_i + b; a > 0, b \in IR\}$ réprésente un seul et même système de préférences. La solution du problème de négociation recherchée, en vertu de l'invariance par changement d'échelle, ne dépend que de $\overline{u}_i$, pas du représentant u_i quelconque pris dans cet ensemble ;

- invariance par contraction : si, s et t faisant partie de l'ensemble des couples de paiements réalisables, s est choisi plutôt que t, alors t ne sera jamais choisi dans aucun problème de négociation où s et t appartiendront à l'ensemble des couples de paiements possibles (c'est l'équivalent de l'axiome d'indépendance vis-à-vis des alternatives non pertinentes de la théorie du choix social).

Nash (1950) montre qu'il existe une solution et une seule du problème de négociation satisfaisant ces axiomes. C'est le point dans l'ensemble des paiements possibles qui maximise le produit des gains d'utilité par rapport au point de désaccord:

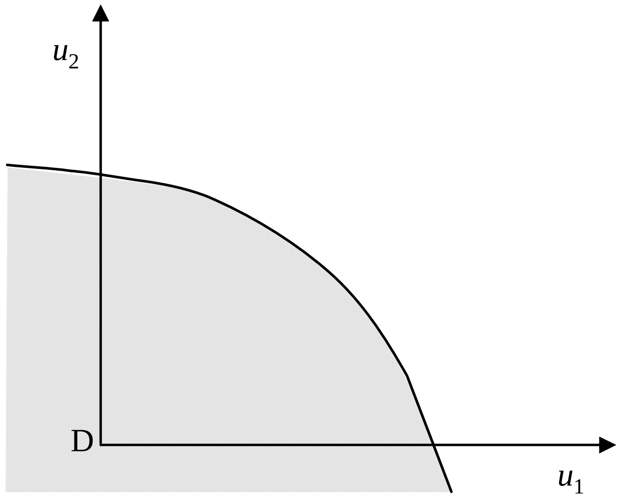
$$(u_1 - u_1{}^{\circ})\,(u_2 - u_2{}^{\circ})$$

Harsanyi et Selten (1972) ont généralisé ce résultat en abandonnant l'axiome de symétrie. La solution est alors celle qui maximise le produit pondéré des gains d'utilité par rapport au point de désaccord, les coefficients de pondération introduisant la dissymétrie dans la solution:

$$(u_1 - u_1{}^{\circ})^{\alpha_1}\,(u_2 - u_2{}^{\circ})^{\alpha_2}$$

Une présentation graphique de la démonstration est proposée par Giraud (2000). La première étape est de construire l'ensemble des paiements réalisables : l'ensemble des allocations des biens possibles dans la boîte d'Edgeworth $X = \{(x_1, x_2)\,; x_{11} + x_{21} = w_1$ et $x_{12} + x_{22} = w_2\}$ où $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ est le panier de biens du joueur i. L'ensemble des paiements possibles s'en déduit directement :

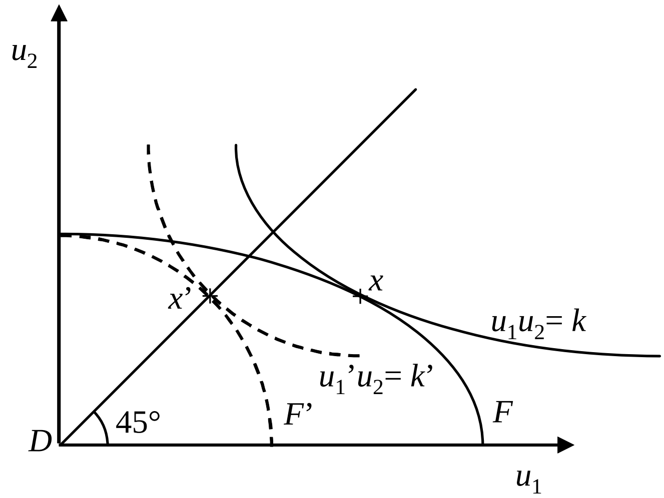
$$F = \{(u_1\,(x_1)\,, u_2\,(x_2))\,; (x_1, x_2) \in X\}$$



Sachant que l'utilité est définie à une fonction affine strictement croissante près, il est permis et commode de prendre le point de désaccord $D = (0, 0)$, comme origine dans le graphe de F. Alors, les points du quadran N-E correspondent aux allocations individuellement rationnelles, comparées par rapport à D, à l'intérieur de l'ensemble délimité par les courbes d'indifférence I_1 et I_2. Si les fonctions d'utilité sont concaves, l'ensemble F est convexe. La frontière de cet ensemble correspond à la courbe de contrat dans la boîte d'Edgeworth

A ce stade, on en est au même point que dans l'introduction. Au même titre que l'on conservait, sous couvert des axiomes de rationalité individuelle et de Pareto-optimalité, seulement la courbe de contrat entre I_1 et I_2, nous retenons ici comme solutions possibles les points de la frontière de F dans le cadran N-E. La solution de Nash retient parmi ces points celui qui maximise $(u_1 - D_1)(u_2 - D_2)$ (avec par convention, dans la démonstration, $D_1 = D_2 =$

0).

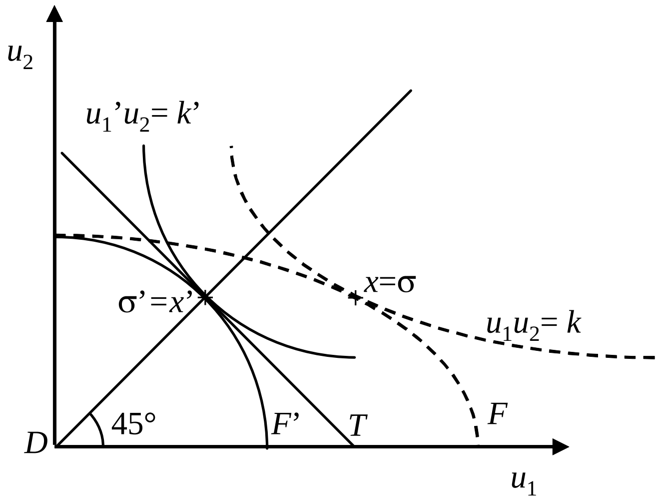


Elle satisfait la symétrie : si le joueur 1 devient le joueur 2 et inversement, en abscisses, on mesure u_2 et en ordonnées, u_1 ; F ne change pas ; de plus, $u_1 u_2 = k$ ne change pas suite à cette permutation.

Elle satisfait l'axiome de contraction : x est toujours une solution quelle que soit la restriction faite sur F mais contenant x.

Elle satisfait l'axiome d'invariance par changement d'échelle car toute transformation affine déplace de la même façon l'ensemble F et l'ensemble défini par $u_1 u_2 = k$. Par exemple, sur la figure, on transforme u_1 en $u_1' = u_1/2$; le point x devient le point x' et est toujours solution de Nash du nouveau problème de négociation. Par ailleurs, x et x' correspondent au même point dans la boîte d'Edgeworth.

Il faut maintenant prouver la solution de Nash est unique. Pour cela, on choisit σ une solution satisfaisant les axiomes. On montre qu'elle coïncide avec la solution de Nash, notée x.



Du fait de l'invariance d'échelle, toute solution x peut être transformée en une solution x' sur la bissectrice. Soit F' l'ensemble des paiements réalisables après cette transformation. On peut alors construire un ensemble de paiement réalisable fictif T, en prenant la perpendiculaire à la bissectrice passant par x'. On remarque alors que, pour le nouveau problème de négociation ainsi défini avec T, la solution σ' (obtenue par la même transformation affine) et la solution de Nash sont confondue :

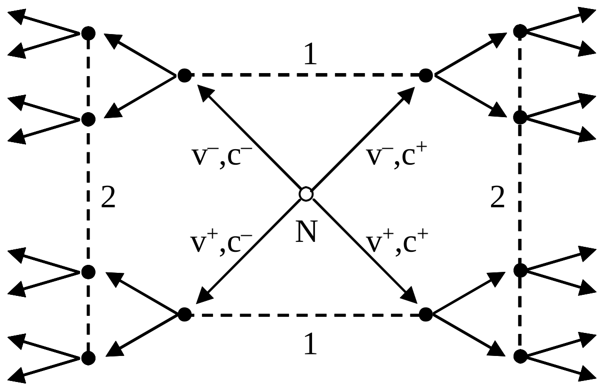
- x' maximise $u_1 u_2$ sous la contrainte $(u_1, u_2) \in T$ (noter que le graphe de est tangent à la frontière de T sur la bissectrice par construction de T) ;

- l'ensemble T étant symétrique, les deux joueurs sont totalement interchangeables et la solution σ' doit être telle que $u_1 = u_2$. Par ailleurs, elle doit vérifier les deux premiers axiomes et se trouve donc sur la frontière de T.

En utilisant l'axiome d'invariance par contraction, on conclut que la solution σ' précédemment définie reste solution quand l'ensemble $F' \subset T$ est considéré avec $x' \in F'$ (on note en effet que T est tangente à F' en x', x' étant solution de Nash). Finalement, on utilise l'invariance d'échelle pour montrer que $\sigma = x$ est la solution cherchée pour F.

Le théorème de Myerson et Satterthwaite (1983) procède de la même méthode que Nash (1950). Dans un contexte plus général d'information incomplète, ils partent des propriétés que devraient vérifier la solution pour caractériser cette dernière, sans chercher à prédire quoi que ce soit. A la différence de Nash, ils sont conduits à démontrer un théorème d'inexistence.

Dans la version discrète de leur modèle, l'arbre du jeu prendrait la forme :



On a :

- $v^- < v^+$;
- α : probabilité que le joueur 1 soit de type v^- ;
- $1-\alpha$: probabilité que le joueur 1 soit de type v^+ ;
- $c^- < c^+$;
- β : probabilité que le joueur 1 soit de type c^- ;
- $1-\beta$: probabilité que le joueur 1 soit de type c^+.

La nature joue en premier et tire au sort, selon une loi connue des deux joueurs, entre les états du monde (c^-, v^-), (c^-, v^+), (c^+, v^-) et (c^+, v^+). Les ensembles d'information de l'arbre sont tels que : le joueur 1 sait, lorsque son tour vient, si on est dans un état v^- ou v^+ ; le joueur 2 sait, lorsque son tour vient, si on est dans un état c^- ou c^+. On dit que $v \in \{v^-, v^+\}$ est une information privée du joueur 1 et que $c \in \{c^-, c^+\}$ est une information privée du joueur 2. L'information est donc asymétrique. On peut interpréter le jeu de la façon suivante : le joueur 1 désire un bien que le joueur 2 possède ; il attribue la valeur v à ce bien, mais ne connaît pas la valeur c que lui donne deux, et inversement...

L'arbre du jeu reste volontairement obscure sur le déroulement précis du jeu et ne met en lumière que les questions informationnelles. La raison est la suivante : il n'y a pas une façon naturelle de représenter la situation dans laquelle les deux joueurs sont, mais une multitude. La représentation ci-dessus suggère que, une fois que la nature a joué, les deux joueurs jouent simultanément, en annonçant par exemple un prix plafond pour l'acheteur (le joueur 1) et un prix plancher pour le vendeur (le joueur 2) (car deux n'observe pas le coup joué par 1). Cette version est la plus simple possible : si les offres peuvent être répétées, si les coups précédents peuvent être observés, alors les joueurs pourront éventuellement parfaire leur connaissance de leur adversaire (l'information privée ou le type de celui-ci), afin d'en tirer avantage dans l'échange ; évidemment, les joueurs ne permettront cela qu'à la condition que cela leur serve aussi, faute de quoi ils adopteront un comportement strictement non informatif, autrement dit, indépendant de leur information privée.

Devant la multiplicité des jeux possible et la complexité de certains d'entre eux (pour un résultat qui sera toujours particulier), Myerson et Satterthwaite adopte l'attitude quivante, permise par le principe de révélation (cf. plus loin). En fin de compte, et quel que soit l'arbre du jeu et le chemin suivi pour l'atteindre, le paiement des joueurs en un noeud terminal quelconque sera toujours de la forme :

$$\begin{aligned}(v-p)\,q \text{ pour le joueur 1 de type } v &\in \{v^-,v^+\}\\ (p-c)\,q \text{ pour le joueur 2 de type } c &\in \{c^-,c^+\}\end{aligned}$$

où p est le prix sur lequel les joueurs se sont "entendus" et q est une variable qui prend la valeur 1 quand les deux joueurs acceptent l'échange au prix p et 0 dans le cas contraire. p et q doivent être vus comme des fonctions dont les arguments sont les stratégies des σ_1 et σ_2 joueurs 1 et 2, elles-mêmes fonction du type du joueur. En rassemblant tout cela, on a donc :

$$p\left(\sigma_1(v),\sigma_2(c)\right) \text{ et } q\left(\sigma_1(v),\sigma_2(c)\right), \text{ pour } v\in\{v^-,v^+\} \text{ et } c\in\{c^-,c^+\}$$

Le principe de révélation : le principe de révélation énonce de façon général que, à tout profil de stratégies $\overline{\sigma}=(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_I)$ qui est un équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale où les paiements sont $u_i(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_I;t_i)$, où t_i désigne l'information privée de i, correspond un jeu (ou mécanisme) de révélation directe où les paiements sont $u_i^*(t_1^*,t_2^*,...,t_I^*;t_i)$, où l'ensemble des stratégies de chaque joueur est l'annonce t_i^* d'un type dans l'ensemble des types possibles et où $t^*=(t_1,t_2,...,t_I)$, c'est-à-dire l'annonce de la vérité et la participation au mécanisme, est un équilibre de Nash.

NB : en d'autres termes, il existe une application de l'ensemble des jeux vers l'ensemble des mécanismes de révélation directe et cette application est injective.

Pour l'exemple qui nous intéresse ici, si $(\overline{\sigma}_1(v),\overline{\sigma}_2(c))$ est un équilibre de Nash du jeu, alors en posant $p^*(v,c)=p(\overline{\sigma}_1(v),\overline{\sigma}_2(c))$ et $q^*(v,c)=q(\overline{\sigma}_1(v),\overline{\sigma}_2(c))$, pour $v\in\{v^-,v^+\}$ et $c\in\{c^-,c^+\}$, l'annonce par les joueurs de leur vrai type constitue un équilibre de Nash du jeu où les paiements terminaux sont :

$$\begin{aligned}(v-p^*)\,q^* \text{ pour le joueur 1 de type } v &\in \{v^-,v^+\}\\ (p-c^*)\,q^* \text{ pour le joueur 2 de type } c &\in \{c^-,c^+\}\end{aligned}$$

La contraposée du principe de révélation est très utile. En effet, on peut considérer un mécanisme direct quelconque (p^*,q^*), fixant le prix d'échange et l'occurence de l'échange en fonction de l'état du monde (v,c), et vérifier s'il peut être obtenu comme un équilibre de Nash où l'annonce de son type est la stratégie d'équilibre des joueurs. Si tel est effectivement le cas, alors il existe au moins un jeu permettant le même résultat (même prix et même occurence de l'échange pour le même état du monde). Au contraire, si l'annonce de la vérité sur son type n'est pas un équilibre de Nash du jeu défini par (p^*, q^*), alors le résultat recherché implicitement ne pourra jamais, en vertu du principe de révélation, être obtenu comme équilibre de Nash dans un jeu dérivé quelconque (non direct, non révélateur).

Pour tirer avantage de cette méthode, il faut aborder deux points. D'abord, on doit se demander à quelle condition un mécanisme (p^*, q^*) est révélateur, autrement dit incite les joueurs à participer en annonçant leur information privée (contrainte de participation) et à le faire honnêtement (contrainte de compatibilité avec les incitations). Ensuite, il faut justifier le choix de tel mécanisme ou de tel autre, en invoquant par exemple l'optimalité Parétienne, l'autosuffisance des joueurs (contrainte de budget)...

Un mécanisme direct (p^*, q^*) est révélateur s'il satisfait :

- la contrainte de participation : le paiement espéré en participant au mécanisme et en annonçant la vérité est supérieur à l'utilité de réservation hors mécanisme, ici 0 :

$$\begin{aligned} U_1(v) &\geq 0, \text{ pour } v = v^-, v^+ \\ U_2(c) &\geq 0, \text{ pour } c = c^-, c^+ \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} U_1(v) &= E_c[(v - p^*(v,c))\, q^*(v,c)] \\ &= \beta\left(v - p^*\left(v, c^-\right)\right) q^*\left(v, c^-\right) + (1-\beta)\left(v - p^*\left(v, c^+\right)\right) q^*\left(v, c^+\right) \\ U_2(c) &= E_v[(p^*(v,c) - c)\, q^*(v,c)] \\ &= \alpha\left(p^*\left(v^-, c\right) - c\right) q^*\left(v^-, c\right) + (1-\alpha)\left(p^*\left(v^+, c\right) - c\right) q^*\left(v^+, c\right) \end{aligned}$$

- la contrainte de compatibilité avec les incitations : le paiement espéré en annonçant en annonçant la vérité est supérieur au paiement espéré en manipulant l'information :

$$\begin{aligned} U_1(v,v) &\geq U_1(v^*, v), \text{ pour } v = v^-, v^+ \text{ et } v^* = v^-, v^+ \\ U_2(c,c) &\geq U_2(c^*, c), \text{ pour } v = v^-, v^+ \text{ et } v^* = v^-, v^+ \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} U_1(v^*, v) &= E_c[(v - p^*(v^*, c))\, q^*(v^*, c)] \\ U_2(c^*, c) &= E_v[(p^*(v, c^*) - c)\, q^*(v, c^*)] \end{aligned}$$

On montre le résultat suivant :

Théorème de Myerson et Satterthwaite (1983) : Etant donné une règle q^*, il existe un vecteur de prix p^* tel que le mécanisme direct révélateur (p^*, q^*) soit compatible avec les incitations et la participation si et seulement si :

$$\text{a) } E_c[q^*\left(v^+, c\right)] \geq E_c[q^*\left(v^-, c\right)] \text{ et } E_v[q^*\left(v, c^-\right)] \geq E_v[q^*\left(v, c^+\right)]$$

$$\text{b) } E_{v,c}[(v-c)\, q^*(v,c)] \geq E_{v,c}[\left(v - v^-\right) q^*\left(v^-, c\right) + \left(c^+ - c\right) q^*\left(v, c^+\right)]$$

Le premier résultat découle directement des contraintes incitatives. Pour simplifier, notons $P_1(v) = E_c[p^*(v,c)\,q^*(v,c)]$, $P_c(c) = E_v[p^*(v,c)\,q^*(v,c)]$, $Q_1(v) = E_c[q^*(v,c)]$ et $Q_2(c) = E_v[q^*(v,c)]$. Les contraintes s'écrivent alors :

(1.a) $v^+Q_1(v^+) - P_1(v^+) \geq 0$
(1.b) $v^-Q_1(v^-) - P_1(v^-) \geq 0$
(1.c) $v^+Q_1(v^+) - P_1(v^+) \geq v^+Q_1(v^-) - P_1(v^-)$
(1.c) $v^-Q_1(v^+) - P_1(v^+) \leq v^-Q_1(v^-) - P_1(v^-)$

(2.a) $P_2(c^+) - c^+Q_2(c^+) \geq 0$
(2.b) $P_2(c^-) - c^-Q_2(c^-) \geq 0$
(2.c) $P_2(c^+) - c^+Q_2(c^+) \geq P_2(c^-) - c^+Q_2(c^-)$
(2.c) $P_2(c^+) - c^-Q_2(c^+) \leq P_2(c^-) - c^-Q_2(c^-)$

En retranchant membre à membre (1.d) à (1.c), on trouve :

$$\left(v^+ - v^-\right)\left(Q_1\left(v^+\right) - Q_1\left(v^-\right)\right) \geq 0$$

Ceci prouve la première partie de a). En faisant de même pour l'autre joueur, on obtient la seconde. La partie b) est plus longue. On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} E_{v,c}[u_1(v,c) + u_2(v,c)] &= E_{v,c}[(v - p^*(v,c))\,q^*(v,c) + (p^*(v,c) - c)\,q^*(v,c)] \\ &= E_{v,c}[(v-c)\,q^*(v,c)] \end{aligned}$$

Deux commentaires doivent être faits. D'abord, comme nous modélisons un échange, ce qui est reçu par l'un est versé par l'autre. Le terme $p^*(v,c)$ disparaît donc. Le mécanisme que nous décrivons est dit équilibré ; notamment, les joueurs ne reçoivent aucune subvention. Ensuite, et par conséquent, le gain attendu du mécanisme dépend uniquement de la règle choisie $q^*(v,c)$.

La contrainte (1.c) implique :

$$\begin{aligned} U_1\left(v^+\right) &= v^+Q_1\left(v^+\right) - P_1\left(v^+\right) \\ &\geq \left(v^+ - v^-\right)Q_1\left(v^-\right) + v^-Q_1\left(v^-\right) - P_1\left(v^-\right) \\ &> U_1\left(v^-\right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si (1.b) est satisfaite, (1.a) l'est aussi. De même, en utilisant (2.d), on montre que :

$$\begin{aligned} U_2\left(c^-\right) &= P_2\left(c^-\right) - c^-Q_2\left(c^-\right) \\ &\geq \left(c^+ - c^-\right)Q_2\left(c^+\right) + P_2\left(c^+\right) - c^+Q_2\left(c^+\right) \\ &> U_2\left(c^+\right) \end{aligned}$$

et que (2.a) implique (2.b). Les résultats ainsi obtenus nous permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} (1.*)\ U_1\left(v^+\right) &\geq U_1\left(v^-\right) + \left(v^+ - v^-\right)E_c[q^*\left(v^-,c\right)], \text{ pour } v = v^-, v^+ \text{ avec } U_1\left(v^-\right) \geq 0 \\ (2.*)\ U_2\left(v^-\right) &\geq U_2\left(v^+\right) + \left(c^+ - c^-\right)E_v[q^*\left(v,c^+\right)], \text{ pour } c = c^-, c^+ \text{ avec } U_2\left(c^+\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Les conditions (1.*) et (2.*) remplacent (1.a), (1.b), (1.c), (1.d) et (2.a), (2.b), (2.c), (2.d) respectivement. En regroupant ces deux conditions, on voit qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} E_{v,c}[u_1(v,c)+u_2(v,c)] &= E_v[U_1(v)]+E_c[U_2(c)] \\ &\geq E_v\left[U_1\left(v^-\right)+\left(v^+-v^-\right)E_c[q^*\left(v^-,c\right)]\right] \\ &\quad +E_c\left[U_2\left(v^+\right)+\left(c^+-c^-\right)E_v[q^*\left(v,c^+\right)]\right] \\ &\geq U_1\left(v^-\right)+U_2\left(v^+\right) \\ &\quad +E_{v,c}\left[\left(v^+-v\right)q^*\left(v^-,c\right)+\left(c^+-c\right)q^*\left(v,c^+\right)\right] \end{aligned}$$

En posant $U_1(v^-)=U_2(v^+)=0$, ce qui est suffisant pour les contraintes de participation conformément à ce qui a déjà été montré, on obtient le résultat b) du théorème.

La seconde partie du théorème a des conséquences qui doivent être soulignées. Elle équivaut à affirmer qu'une règle $q^*(v,c)$ est faisable si elle produit une espérance de gain $E_{v,c}[(v-c)\,q^*(v,c)]$ dans l'échange suffisante pour couvrir les rentes d'information des co-échangistes, que l'on peut réduire au maximum à la valeur $E_{v,c}[(v^+-v)\,q^*(v^-,c)]$ (soit 0 pour v^- et $E_{v,c}[(v^+-v^-)\,q^*(v^-,c)]$) et $E_{v,c}[(c^+-c)\,q^*(v,c^+)]$ (soit 0 pour c^+ et $E_{v,c}[(c^+-c)\,q^*(v,c^+)]$ pour c^-). L'étude de cette condition permet d'établir le résultat suivant :

Corrolaire du théorème de Myerson et Satterthwaite (1983) : La règle optimale, consistant à concrétiser l'échange quand $v \geq c$, à ne rien faire sinon, qui s'écrit :

$$q^*(v,c)=\begin{cases} 1 \text{ si } v \geq c \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

satisfait la condition b) du théorème quand :

a) $v^- < v^+ < c^- < c^+$: ne jamais échanger ;

b) $v^- < c^- \leq v^+ < c^+$: les rentes d'information sont nulles car $q^*(v^-,c)=q^*(v,c^+)=0$;

c) $v^- < c^- < c^+ \leq v^+$: les rentes d'information sont unilatérales car $q^*(v,c^+)=0$;

d) $c^- \leq v^- < v^+ < c^+$: les rentes d'information sont unilatérales car $q^*(v,c^+)=0$;

e) $c^- \leq v^- < c^+ \leq v^+$ et $\alpha\beta(v^--c^-)+(1-\alpha)\beta(v^--c^+)+(1-\alpha)(1-\beta)(v^+-c^+) \geq 0$;

f) $c^- < c^+ \leq v^- < v^+$: toujours échanger.

Elle la viole quand $c^- \leq v^- < c^+ \leq v^+$ et $\alpha\beta(v^--c^-)+(1-\alpha)\beta(v^--c^+)+(1-\alpha)(1-\beta)(v^+-c^+)<0$.

2) L'approche stratégique :

Cette approche a été initié par Nash (1953). L'ensemble des allocations réalisables s'écrit $X=\{(x,y)\,;x+y\leq 1\}$. Les fonctions d'utilité des deux négociateurs sont concaves et strictement croissantes. Le protocole de négociation est simple : les deux négociateurs expriment simultanément un demande ; si elles sont compatibles, elles sont réalisées ; sinon, le jeu s'arrête. La forme normale du jeu s'écrit donc :

- ensemble des stratégies : $S_1 = S_2 = IR^+$;

- fonctions de paiement : $u_i(s_1, s_2) = \begin{cases} s_i \text{ si } s_1 + s_2 \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Dans ce jeu, on montre que tout optimum de Pareto individuellement rationnel, c'est-à-dire tout élément de X, correspond à un équilibre de Nash du processus de négociation.

La démonstration est évidente :

- si $(s_1, s_2) \notin X$:

- soit $s_1 + s_2 > 1$. En excluant le cas absurde où s_1 et s_1 sont supérieurs à 1, l'un des joueurs peut obtenir un paiement strictement positif en diminuant suffisamment sa demande ;

- soit $s_1 + s_2 < 1$. Alors, l'un des joueurs peut améliorer son paiement en augmentant sa demande.

- si $(s_1, s_2) \in X$: toute déviation par rapport à cette stratégie d'équilibre est défavorable.

Ce résultat est négatif. Les équilibres sont multiples, de sorte qu'on se demande comment les deux joueurs vont se coordonner sur un équilibre plutôt qu'un autre. Par ailleurs, certains équilibres semblent peu raisonnables, comme $(1, 0)$ et $(0, 1)$ par exemple.

Le mérite de l'étude de la version dynamique du modèle revient à Rubinstein (1982). Le protocole de négociation est le suivant. Chaque tour de table dure Δ unités de temps. Le taux d'intérêt psychologique r_i $(i = 1, 2)$ détermine le facteur d'escompte δ_i $(i = 1, 2)$ pour chaque étape de négociation : $\delta_i = e^{-r_i\Delta}$, $i = 1, 2$. La négociation procède par offres alternatives :

- si t est impair, le joueur 1 fait une offre x dans $[0, 1]$, à laquelle le joueur 2 répond par $\{oui, non\}$;

- si t est pair, le joueur 2 fait une offre y dans $[0, 1]$, à laquelle le joueur 2 répond par $\{oui, non\}$.

Si la proposition x_t est acceptée à la date t, le paiement est : $\delta_1^t u_1(x_t)$, $\delta_2^t u_2(1 - x_t)$;

Si la proposition y_t est acceptée à la date t, le paiement est : $\delta_1^t u_1(1 - y_t)$, $\delta_2^t u_2(y_t)$.

Le concept d'équilibre retenu par Rubinstein est celui de perfection en sous-jeux. Chaque joueur choisit une stratégie spécifiant, pour tout durée possible de la négociation et pour toute suite possible de propositions refusées jusque-là, l'offre faite quand son tour de proposition arrive et la réponse quand son tour de décision arrive. Cette stratégie doit être optimale pour tous les déroulements possibles de la négociation, c'est-à-dire que leur poursuite garantit un paiement maximum à chaque joueur, compte tenu de la stratégie de l'autre.

Théorème d'existence et d'unicité des stratégies d'équilibre parfait en sous-jeux dans le modèle de négociation de Rubinstein (1982) :

- il existe un couple unique x^*, y^* de $[0, 1]$ tel que :

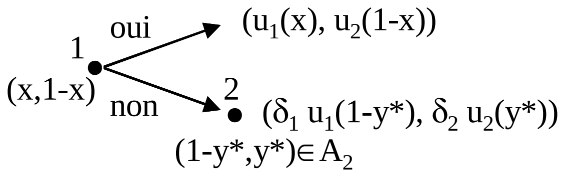
$$\begin{aligned} \delta_1 u_1(x^*) &= u_1(1 - y^*) \\ \delta_2 u_2(y^*) &= u_2(1 - x^*) \end{aligned}$$

- l'équilibre parfait en sous-jeu est unique. Les stratégies d'équilibre sont les suivantes : le joueur 1 demande toujours x^* et rejette toute offre inférieure à $1-y^*$; le joueur 2 demande toujours y^* et rejette toute offre inférieure à $1-x^*$.

Comme c'est le joueur 1 qui commence, le partage d'équilibre est $(x^*, 1-x^*)$. Si le joueur 2 commençait, le partage serait $(1-y^*, y^*)$.

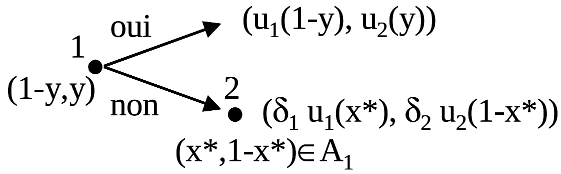
Pour démontrer ce résultat, appelons $A_1 = \{(x, 1-x)\,; x \in [0,1]\}$ le sous-ensemble de X représentant l'ensemble des partages $(x, 1-x)$ qui peuvent être obtenus comme résultat d'un équilibre parfait en sous-jeux quand le joueur 1 joue en premier. De même, on définit $A_1 = \{(1-y, y)\,; y \in [0,1]\}$ les partages qui peuvent être obtenus comme équilibre parfait en sous-jeux quand le joueur 2 joue en premier. On veut montrer que ces deux ensembles n'ont qu'un élément, qui vérifie les conditions ci-dessus.

Considérons la situation suivante : le joueur 1 doit faire une proposition $(x, 1-x)$ sachant que, si le joueur 2 la rejette, l'équilibre parfait en sous-jeux associé au tour suivant donne $(1-y^*, y^*) \in A_2$.



On en déduit que seules les propositions $(x, 1-x)$ du joueur 1 au premier tour qui vérifient $u_2(1-x) \geq \delta_2 u_2(y^*)$ seront acceptées par le joueur 2. Dans cet ensemble des propositions acceptables du point de vue du joueur 2, le joueur 1 préfère celle qui lui donne la part la plus grande possible, soit vérifiant $u_2(1-x) = \delta_2 u_2(y^*)$. On vérifie aisément qu'elle est préférable à toute proposition essuyant un refus de la part du joueur 2 : $u_1(x) > \delta_1 u_1(1-y^*)$ si $u_2(1-x) = \delta_2 u_2(y^*)$ (en effet, $x > 1-y^*$ découle de cette égalité).

Considérons la situation symétrique : le joueur 2 doit faire une proposition $(1-y, y)$ sachant que, si le joueur 1 la rejette, l'équilibre parfait en sous-jeux associé au tour suivant donne $(x^*, 1-x^*) \in A_1$.



De même que précédemment, on montre que : les propositions $(1-y, y)$ sont acceptées par le joueur 1 si $u_1(1-y) \geq \delta_1 u_1(x^*)$ et les autres sont refusées ; parmi les propositions acceptées, le joueur 2 préfère celle qui satisfait $u_1(1-y) = \delta_1 u_1(x^*)$; de plus, celle-ci est préférable à un refus car $u_2(y) > \delta_2 u_2(1-x^*)$ si $u_1(1-y) = \delta_2 u_2(x^*)$.

On vient ainsi de construire deux équilibres parfaits, en adjoignant les actions préférées des joueurs au noeud initial du sous-jeu (dans le premier jeu, le joueur 1 choisit $(x, 1-x)$ et le joueur répont $\{oui, non\}$; dans le second, c'est l'inverse) aux stratégies d'équilibre parfait du sous-jeu suivant, définies implicitement par $(1-y^*, y^*) \in A_2$ dans le premier jeu, et $(x^*, 1-x^*) \in A_1$ dans le second.

Si maintenant on montre qu'il existe une unique solution au système $\delta_1 u_1 (x) = u_1 (1-y)$ et $\delta_1 u_2 (y) = u_2 (1-x)$, on pourra conclure que, s'il existe un équilibre parfait en sous-jeux, alors il doit être unique. En effet, les résultats ci-dessus montrent que tout élément $(x, 1-x)$ de A_1 satisfait la condition $u_2 (1-x) = \delta_1 u_2 (y)$ pour un élément $(1-y, y) \in A_2$ et que tout élément $(1-y, y) \in A_2$ satisfait la condition $u_1 (1-y) = \delta_1 u_1 (x)$ pour un élément $(x, 1-x)$ de A_1. Les éléments de A_1 et A_2 marchent donc par paires qui satisfont les deux conditions à la fois. Il y aura donc autant d'éléments que de couples solutions de $\delta_1 u_1 (x) = u_1 (1-y)$ et $\delta_1 u_2 (y) = u_2 (1-x)$.

Avant de conclure la démonstration, il convient de bien vérifier que les stratégies d'équilibre existent bel et bien. En effet, jusqu'ici, nous avons posé l'existence d'un tel équilibre pour en construire un autre. Or, c'est le cas si l'on prend les stratégies données dans le théorème.

Bibligraphie

Demange G. et J.-P. Ponssard, Théorie des jeux et analyse économique, Presses universitaires de France, 1994.

Giraud G., La théorie des jeux, Flammarion, 2000.

Kreps D.M., A Course in Microeconomic Theory, Harvester, 1990 (traduction française, PUF, 1993).

Rochet J.-C. (1988), "Théorie de la négociation : une sélection de quelques résultats récents", Annales d'économie et de statistique, .12 : 1-25.

Shubik M., Game Theory in the Social Science, Concepts and Solutions, MIT Press, 1984 (third printing, 1985).