TD2 - LE PRODUCTEUR

Dans les exercices ci-dessous, on considère un producteur utilisant les biens 1 et 2, pour produire le bien 3. On utilise les mêmes notations qu'en cours :

$$\begin{aligned}
z_1,\, z_2 &= \text{quantité d'inputs, } z_1 \geqslant 0,\, z_2 \geqslant 0,\\
y_3 &= \text{output, } y_3 \geqslant 0,\\
f(z_1, z_2) &= \text{fonction de production,}\\
(\omega_1 = p_1),\ (\omega_2 = p_2),\ (p = p_3) &= \text{prix des biens.}
\end{aligned}$$

Pour l'exercice 2.1, on aura besoin des rappels suivants.
Rappel 1. On définit :
- la productivité moyenne de l'input k $(k = 1, 2)$, notée PM_k, par $f(z_1, z_2)/z_k$;
- la productivité marginale de l'input k $(k = 1, 2)$, notée Pm_k, par $\partial f(z_1, z_2)/\partial z_k$.

Rappel 2. La fonction de plusieurs variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ est homogène de degré k ssi $\forall x$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^k f(x)$.

Exercice 2.1*. Soit la fonction de production

$$y_3 = f(z_1, z_2) = A z_1^a z_2^b,\ A > 0,\ a > 0,\ b > 0.$$

a) Calculer les productivités moyennes.
b) Calculer les productivités marginales.
c) Déterminer le degré d'homogénéité de la fonction de production.
d) En déduire la nature des rendements d'échelle.

Exercice 2.2*. On considère la fonction de production

$$y_3 = f(z_1, z_2) = z_1^{1/4} z_2^{1/2}.$$

a) Tracer l'isoquante $y_3 = 1$ dans le plan (O, z_1, z_2).
b) En posant $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $p_3 = p$, déterminer les fonctions d'offre de bien et de demande de facteurs de production de l'entreprise.

Exercice 2.3*. Même exercice pour la fonction de production

$$y_3 = f(z_1, z_2) = \left(z_1^{1/4} + z_2^{1/4}\right)^2.$$