Chapitre 4. Analyse d'équilibre partiel

4.1. Introduction.

L'analyse d'équilibre partiel remonte à Marshal (1890). Elle consiste à étudier un marché pris isolément, en négligeant les effets d'équilibre général sur les autres marchés. Ceci est permis à deux conditions.

Premièrement, la part des dépenses dans ce bien, dans le budget de chaque consommateur, doit être faible. Alors, les effets de revenu, résultant des modifications sur ce marché, seront faibles et auront des conséquences négligeables sur les autres marchés.

Deuxièmement, les effets de substitution entre ce bien et les autres doivent être "diffus". Cette hypothèse implique que les modifications sur le marché considéré n'affecteront pas les prix relatifs des autres biens.

Sous ces hypothèses, on admet que, peu importe la situation sur le marché considéré à part, les prix des autres biens ne varient pas. On assimile alors les autres biens à un bien composite, dont on mesure la quantité en valeur, aux prix courants.

Formellement, ceci revient à se ramener à une économie comportant deux biens, à savoir le bien considéré à part et le bien composite. Avec les notations des chapitres précédents, on a donc $K = 2$. Ci-dessous, les indices des biens seront $k = 1$, pour le bien étudié, et $k = 2$, pour le numéraire. Dans cette économie simplifiée, on attribue conventionnellement au bien composite un prix égal à 1, de manière que les quantités achétées ou vendues par les agents correspondent à une dépense ou une recette dans les autres biens, évaluée aux prix courants. On appelle alors le bien composite le numéraire de l'économie.

4.2. La demande.

On note x_1 la consommation du bien 1 et x_2 est la consommation du numéraire. Le consommateur est caractérisé par l'ensemble de consommation X et la fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$, définie sur X.

4.2.1. Utilité quasi-linéaire.

La fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$ est dite *quasi-linéaire* si elle peut s'écrire sous la forme $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$. On admet par la suite les deux hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.1. (de calibrage de la mesure de l'utilité). Lorsque le consommateur de consomme pas le bien 1, son utilité est égale à sa dépense totale dans le numéraire : $U(0, x_2) = x_2$. Ceci équivaut à dire que $v(0) = 0$.

Hypothèse 4.2. La fonction $v(x_1)$ est dérivable jusqu'à l'ordre 2, croissante et concave : $v'(x_1) > 0$ et $v''(x_1) < 0$.

L'utilité étant définie à une transformation croissante près, l'hypothèse 4.1 n'a pas de conséquences sur les résultats futurs. Elle est posée par commodité seulement. A l'équilibre, on sait que le consommateur sature son budget. Donc, s'il ne consomme pas le bien 1, il consacre tout son revenu à l'achat du numéraire, soit $x_2 = R$, et son utilité est simplement égale à son revenu, $U(0, R) = R$. L'hypothèse 4.2 est une hypothèse économique. Elle traduit le fait que le consommateur désire le bien 1, mais de moins en moins intensément à mesure qu'il le consomme en quantités plus grandes.

Remarque 4.1. La fonction $v(x_1)$ s'interpréte comme la *propension totale à payer* le bien 1, en unités de numéraire. C'est la somme maximale que le consommateur serait prêt à payer, en numéraire, pour avoir la possibilité de consommer x_1 unités du bien 1. La fonction dérivée $v'(x_1)$ s'interprète comme la *propension marginale à payer* le bien 1, en unités de numéraire. C'est la somme maximale que le consommateur serait prêt à payer, en numéraire, pour avoir une unité supplémentaire du bien 1.

Exercice 4.1. Justifier l'interprétation de $v(x_1)$ et $v'(x_1)$. Montrer que $TMS_{12} = v'(x_1)$. Commenter ce résultat.

4.2.2. Equilibre du consommateur.

L'équilibre du consommateur est un plan de consommation $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ qui maximise $U(x_1, x_2)$ dans l'ensemble des plans de consommation tels que $(x_1, x_2) \in X$ et $px_1 + x_2 \leqslant R$.

Soit $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ un équilibre du consommateur, supposé intérieur à l'ensemble X. D'après le théorème du Lagrangien, il existe un nombre λ et une fonction Lagrangienne

$$L(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2 - \lambda(px_1 + x_2 - R)$$

telles que $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ vérifie les conditions

$$\begin{aligned} L_1'\left(x_1^0, x_2^0\right) &= 1 - \lambda = 0, \\ L_2'\left(x_1^0, x_2^0\right) &= v'\left(x_1^0\right) - \lambda p = 0, \\ v''\left(x_1^0\right) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

La première condition implique que $\lambda = 1$. En substituant dans la seconde condition, un équilibre $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ du consommateur vérifie simplement $v'\left(x_1^0\right) = p$ et $px_1^0 + x_2^0 = R$. Autrement dit, le consommateur achète le bien 1 jusqu'au point où sa propension marginale à payer ce bien devient égale à son prix. Ensuite, il sature son budget en dépensant le reste de son revenu en bien numéraire. L'hypothèse 4.2 implique que la troisième condition (condition du second ordre) est toujours satisfaite. Elle implique aussi que l'équilibre du consommateur est unique (comme $v'(x_1)$ est décroissante, le système ci-dessus a une unique solution).

4.2.3. Fonctions de demande directe et inverse.

On étudie le comportement du consommateur sur le marché du bien 1. On distingue les notions de demande directe et inverse. La fonction de demande directe du consommateur donne la quantité demandée, en fonction du prix. La fonction de demande inverse donne le prix, en fonction de la quantité demandée. En analyse d'équilibre partielle, on utilise plus volontiers dans les représentations graphiques la notion de demande inverse. On porte alors les quantités en abscisses et les prix en ordonnées.

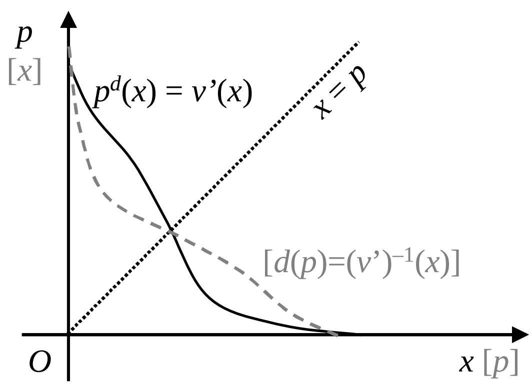
Au préalable, il faut noter la propriété suivante.

Propriété 4.1. A l'équilibre, la demande du consommateur sur le marché du bien 1 dépend de p, pas de R.

Cette propriété découle directement des conditions précédentes. Elle est une conséquence du choix d'une fonction d'utilité quasi-linéaire.

On appelle *fonction de demande directe*, la fonction $d(p)$, associant à tout prix p, la quantité d'équilibre du consommateur. Pour tout p, $x_1^0 = d(p)$ est un équilibre du consommateur si, et seulement si, $v'\left(x_1^0\right) = p$. Donc, la fonction de demande $d(p)$ vérifie : $\forall p$, $v'(d(p)) = p$. Autrement dit, c'est la fonction inverse de $v'(x_1)$ (elle existe, car $v''(x_1) < 0$).

On appelle *fonction de demande inverse* la fonction $p^d(x)$, associant à toute quantité x, le prix auquel le consommateur demande cette quantité. Pour tout x, on a donc $d\left(p^d(x)\right) = x$. Autrement dit, c'est la fonction inverse de $d(p)$. Finalement, on a, pour tout x, $p^d(x) = v'(x)$.



Remarque 4.2. Comme $p^d(x) = v'(x)$, pour tout x, la fonction de demande inverse s'interprète aussi comme la propension marginale à payer le bien 1. C'est donc la valeur de la dernière unité consommée du bien 1, mesurée en unités de numéraire.

Exercice 4.2. Soient un consommateur caractérisé par son revenu R et sa fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, définie sur $R \times [0,1]$, avec $v(x_1) = (1 - x_1/2)\, x_1$. Déterminer $d(p)$ et $p^d(x)$.

4.2.4. Surplus du consommateur.

Le *surplus du consommateur* se définit comme la différence entre ce que le consommateur est prêt à payer au maximum, en unités de bien numéraire, pour consommer une certaine quantité du bien 1 et le montant qu'il paye effectivement sur le marché pour cette quantité. Formellement, s'il achète la quantité x au prix p, le surplus du consommateur sur le marché du bien 1 est donné par

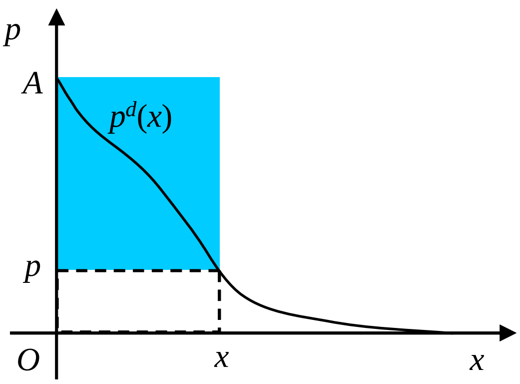
$$\text{Surplus} = v(x) - px.$$

En effet, $v(x)$ est la propension totale à payer la quantité x et la somme effectivement payé sur le marché est px.

On peut montrer (Cf. exercice 4.3) que le surplus du consommateur est aussi donné par

$$\text{Surplus} = \int_0^x \left(p^d(t) - p\right) dt.$$

Cette dernière équation a une conséquence intéressante. Elle implique qu'on peut mesurer graphiquement le surplus du consommateur, comme l'aire de la surface comprise entre l'ordonnée $y = p$ et la courbe représentative de $p^d(x)$, entre les abscisses 0 et x. Il s'agit de la surface en bleue sur la figure suivante.



Exercice 4.3. En reprenant les données de l'exercice 4.2, donner l'expression du surplus du consommateur. On utilisera les deux formules de définition données ci-dessus.

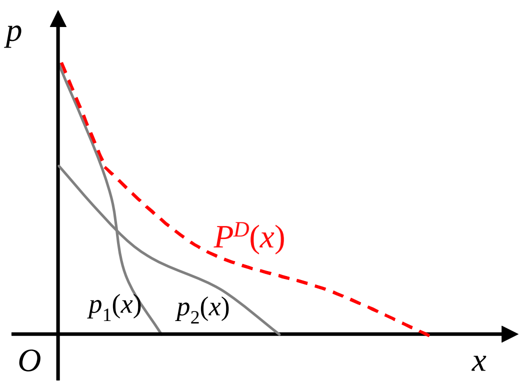
Exercice 4.4. Justifier l'expression Surplus$= \int_0^x \left(p^d(t) - p\right) dt$ et l'interprétation graphique du surplus du consommateur.

4.2.5. La demande du marché.

On suppose ici qu'il y a I consommateurs sur le marché, indicés $i = 1, 2, ..., I$. Ils sont caractérisés par leurs fonctions de demande directe $d_i(p)$ et inverse $p_i(x)$. On veut construire les fonctions de demande directe $D(p)$ et inverse $P^D(x)$ sur le marché, obtenue par agrégation les demandes individuelles.

La fonction de demande directe $D(p)$ donne la quantité totale demandée par les I consommateurs, au prix p. Puisque chaque consommateur i demande la quantité $d_i(p)$, on a $D(p) = \sum_{i=1}^{I} d_i(p)$. On construit sa représentation graphique, en faisant l'addition vers le haut des demandes directes individuelles.

La fonction de demande inverse $P^D(x)$ donne le prix pour lequel les I consommateurs demandent la quantité x sur le marché. Pour tout x, $P(x)$ vérifie $D\left(P^D(x)\right) = x$. C'est donc la fonction inverse de $D(p)$. On construit sa représentation graphique en faisant l'addition vers la droite des courbes de demande inverses individuelles (Cf. la figure suivante).



Remarque 4.3. (mesure du surplus). De même qu'on mesure le surplus d'un consommateur à l'aide de sa fonction de demande inverse $p_i^d(x)$, on mesure le surplus de l'ensemble des consommateurs à l'aide de la fonction de demande inverse agrégée $P^D(x)$, en calculant l'aire compris entre sa courbe représentative et l'ordonnée $y = p$.

Exercice 4.5. On suppose qu'il y a I consommateurs identiques intervenant sur le marché du bien 1. Leurs caractéristiques sont celles données à l'exercice 4.2. Donner les expressions de $D(p)$ et $P^D(x)$.

4.3. Le producteur.

On note y_1 et y_2 les productions de bien 1 et 2 respectivement. La fonction de production du producteur s'écrit $f(y_1, y_2)$.

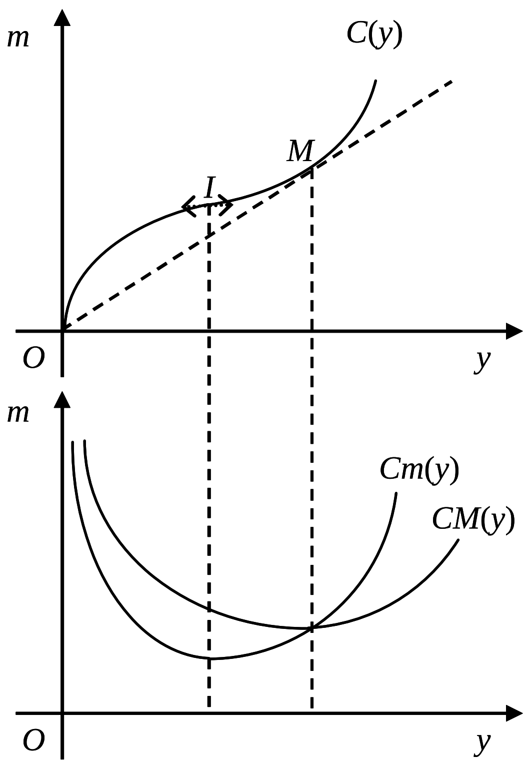
4.3.1. Fonction de coût de production.

En fait, en analyse d'équilibre partiel, on utilise le plus souvent la notion de coût de production, plutôt que celle de fonction de production, pour caractériser le producteur. La *fonction de coût* $C(y)$ donne la quantité minimum de bien 2 nécessaire pour produire y unités du bien 1, sachant la technologie $f(y_1, y_2)$. Formellement, c'est la solution, pour tout $y \geqslant 0$, de l'équation $f(y, C(y)) = 0$.

Remarque 4.4. Il est peut-être nécessaire ici de faire le lien avec les chapitres précédents. Soit donc, en reprenant le cadre d'analyse et les notations utilisées dans les chapitres précédents, $f(y_1, y_2, ..., y_K)$ la fonction de production de l'entreprise et $p_2, p_3, ..., p_K$ les prix des biens autres que 1. La fonction de coût associée à cette technologie est la fonction qui, à toute quantité y_1 du bien 1, associe le coût (minimum) de production de cette quantité, sachant $f(y_1, y_2, ..., y_K)$. C'est le nombre $C(y) = \sum_{k=2}^{K} p_k y_k^0$, où $y_2^0, y_3^0, ..., y_K^0$ minimise $\sum_{k=2}^{K} p_k y_k$ dans l'ensemble des points $(y_1, y_2, ..., y_K)$ vérifiant $f(y_1, y_2, ..., y_K) \leqslant 0$ et $y_1 = y$. On note que $C(y) = \sum_{k=2}^{K} p_k y_k^0$ correspond au coût d'achat du bien composite $\left(y_2^0, y_3^0, ..., y_K^0\right)$, sachant les prix $p_2, p_3, ..., p_K$ prévalant sur les autres marchés. Il s'interpréte donc, dans le cadre du modèle d'équilibre partiel, comme une dépense en bien numéraire (le bien 2), évalué aux prix courants. Cette remarque est aussi l'occasion de rappeler que $C(y)$ dépend des prix des biens utilisés comme inputs. Donc, le fait d'utiliser une fonction de coût de production suppose à nouveau que les modifications sur le marché du bien 1 n'ont pas d'effet sur les prix d'équilibre des autres marchés.

Remarque 4.5. L'analyse en équilibre partiel différencie parfois deux temps analytiques, à savoir la courte et la longue périodes, auxquels correspondent deux fonctions de coût $C^{LP}(y)$ et $C^{CP}(y)$. En courte période, certains inputs sont considérés comme fixés, comme, par exemple, le capital, la technologie, etc. En longue période, ils sont considérés comme variables. La définition donnée ci-dessus correspond à celle d'une fonction de coût de longue période (les quantités $y_2, y_3, ..., y_K$ sont libres). La définition d'une fonction coût de courte période est semblable, la différence résultant seulement du fait que certaines des quantités $y_2, y_3, ..., y_K$ sont fixées. Si, par exemple, la quantité du deuxième bien (disons le capital) est fixée à $\overline{y}_2$ et les autres sont libres, la fonction de coût de courte période associe à chaque quantité y produite du bien 1, le nombre $C^{CP}(y) = \sum_{k=2}^{K} p_k y_k^0$, où $y_2^0, y_3^0, ..., y_K^0$ minimise $\sum_{k=2}^{K} p_k y_k$ dans l'ensemble $f(y_1, y_2, ..., y_K) = 0$, $y_1 = y$ et $y_2 = \overline{y}_2$. On note que le coût de courte période est toujours supérieur ou égal au coût de longue période.

La figure suivante donne l'allure que l'on attribue habituellement à une fonction de coût.



Cette figure appelle les commentaires suivants.

Le coût de production augmente avec la quantité produite y. Il est concave puis convexe. Graphiquement, l'inflexion se situe au point I.

On appelle *coût de production marginal*, noté Cm, la fonction dérivée de $C(y)$. Il mesure le coût de production d'une unité supplémentaire à partir de la quantité y. Graphiquement, cette notion correspond à la pente de la tangente à la courbe représentant $C(y)$ au point considéré.

On sait qu'une fonction est concave (resp. convexe) si sa dérivée première est décroissante (resp. croissante). Graphiquement, cette propriété implique que la courbe représentant Cm est décroissante à gauche du point I, et croissante à droite du point I.

On appelle *coût de production moyen*, noté CM, le coût de production par unité produite $C(y)/y$. Graphiquement, le coût moyen exprime la pente du rayon joignant l'origine au point considéré sur la courbe représentant $C(y)$. Il s'ensuit qu'il passe par un minimum au point M, où le rayon issu de l'origine est tangent à la courbe.

Finalement, notons que les courbes représentant Cm et CM sont sécantes au point où le coût moyen est minimum. A gauche, le coût moyen est plus grand que le coût marginal ; à droite, il est plus petit. (On montre en effet que si CM est minimum, alors $\partial CM/\partial y = -\left(C'\left(y\right) - C\left(y\right)/y\right)/y = 0$, soit $Cm = CM$.)

Exercice 4.6. Etudier la fonction de coût $C\left(y\right) = \left(1/3\right)y^3 - \left(1/2\right)y^2 + y$.

4.3.2. Equilibre de l'entreprise.

L'équilibre de l'entreprise sur le marché du bien 1 est la quantité y^0 qui maximise son profit $\pi = py - C\left(y\right)$. Il vérifie les conditions

$$
\begin{gathered}
p - C'\left(y^0\right) = 0, \\
C''\left(y^0\right) \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Ces conditions s'énoncent aussi

$$
\begin{gathered}
Cm = p, \\
Cm \text{ est localement croissant.}
\end{gathered}
$$

Autrement dit, le producteur apporte sur le marché toutes les unités dont le coût (marginal) de production est inférieur au prix du bien. L'équilibre du producteur se situe toujours dans la zone de rendements décroissants, c'est-à-dire dans la région où le Cm est croissant.

Remarque 4.6. Parfois, on imposera aussi la condition $C'\left(y^0\right) \geqslant C\left(y^0\right)/y^0$. En utilisant des notations plus explicites, on écrit cette condition

$$
Cm \geqslant CM.
$$

Sachant qu'un équilibre vérifie $p = C'\left(y^0\right)$, elle équivaut à $\pi = py^0 - C\left(y^0\right) \geqslant 0$. Autrement dit, le profit doit être non négatif. Cette condition s'applique pour la longue période, où l'entreprise choisira de fermer plutôt que de produire à perte. En courte période, la présence de coût fixe irrécupérable justifie d'ignorer cette condition, l'entreprise n'ayant pas d'autre choix que produire, même à perte, pour amortir ses coûts.

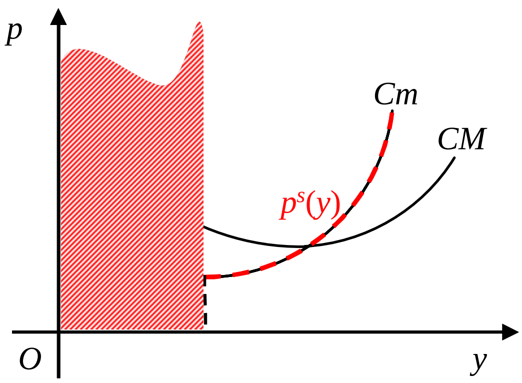
4.3.3. Fonctions d'offre directe et inverse.

Le comportement d'offre de l'entreprise se déduit du paragraphe précédent. Pour tout p, on sait qu'elle apporte sur le marché une quantité y^0 telle que $Cm = p$ et telle que Cm est localement croissant. (En longue période, on ajoute la condition $Cm \geqslant CM$).

On appelle *fonction d'offre directe* la fonction $s\left(p\right)$, associant à tout prix p, la quantité de bien 1 y^0 à l'équilibre de l'entreprise. Puisque, pour tout p, le producteur offre $y^0 = s\left(p\right)$ telle que $C'\left(y^0\right) = p$ et $C''\left(y^0\right) \geqslant 0$, la fonction d'offre $s\left(p\right)$ est la fonction inverse du coût marginal Cm, *dans sa partie croissante* : $\forall p$, $C'\left(s\left(p\right)\right) = p$ et $C''\left(s\left(p\right)\right) \geqslant 0$. (En longue période, on la fonction d'offre $s(p)$ est la fonction inverse du coût marginal Cm, dans sa partie croissante et au-dessus du coût moyen).

On appelle *fonction de demande inverse* la fonction $p^s(y)$, associant à toute quantité y, le prix tel que l'entreprise offre y unités de bien 1 sur le marché. Pour tout x, on a donc $d(p^s(y)) = y$. Autrement dit, la fonction $p^s(y)$ est la fonction inverse de $s(p)$. Finalement, on a, pour tout y,

$$\begin{aligned} p^s(y) &= \text{non définie, si } Cm \text{ est localement décroissant,} \\ &= Cm, \text{ sinon.} \end{aligned}$$



Remarque 4.5. Sur la figure ci-dessus, on peut mesurer le profit de l'entreprise de plusieurs manières différentes. Soit y la quantité offerte et p le prix. Le profit est $\pi = py - C(y)$. Il s'écrit aussi $\pi = (p - C(y)/y)\,y = (p - CM)\,y$. Graphiquement, ceci correspond à l'aire du rectangle bleu. On remarque aussi que, comme $C(y)$ est une primitive de $C'(y)$, on a $C(y) - C(0) = \int_0^y C'(y)\,dt$. L'aire de la surface sous la courbe Cm, entre les quantités 0 et y, mesure donc le coût de production de y unités du biens, hors les éventuels coûts fixes $C(0)$.

4.3.5. L'offre du marché.

On considère ici qu'il y a J entreprises sur le marché, indicés $j = 1, 2, ..., J$, caractérisés par leurs fonctions d'offre directe $s_j(p)$ et inverse $p_j^s(y)$. On veut construire les fonctions d'offre directe $S(p)$ et inverse $P^S(y)$ sur le marché, en agrégeant les offres individuelles.

La fonction de demande directe $S(p)$ donne la quantité totale offerte par les J entreprises, au prix p. Puisque chaque entreprise i offre la quantité $s_j(p)$, on a à l'évidence $S(p) = \sum_{j=1}^{J} s_j(p)$. On construit sa représentation graphique en faisant l'addition vers le haut des courbes d'offre directe des entreprises.

La fonction d'offre inverse $P^S(y)$ donne le prix tel que les J entreprises offrent la quantité y sur le marché. Pour tout y, $P^S(y)$ vérifie $S\left(P^S(y)\right) = y$. C'est donc la fonction inverse de $S(p)$. On construit sa représentation graphique en faisant l'addition vers la droite des courbes d'offre inverses des entreprises (Cf. la figure suivante).

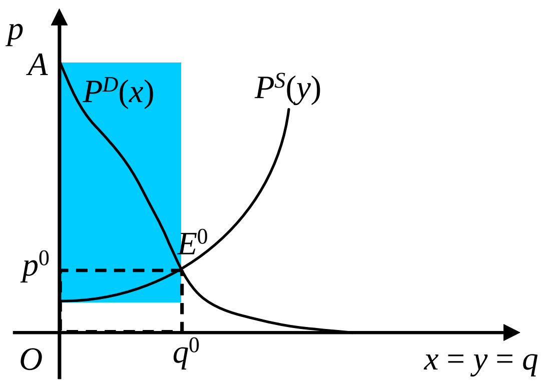
Remarque 4.5. L'aire sous la courbe d'offre individuelle mesure le coût de production variable de la quantité considérée, en unités de numéraire. De même, par construction, l'aire sous la courbe d'offre agrégée mesure le coût agrégé de production de la quantité mise sur le marché, en unités de numéraire.

Exercice 4.7. Déterminer les fonctions d'offre directe $s(p)$ et inverse $p^s(y)$ de l'entreprise décrite dans l'exercice 4.6. En supposant qu'il y a J entreprises identiques sur le marché, déterminer les fonctions d'offre directe $S(p)$ et inverse $P^S(y)$ sur le marché.

4.4. Le surplus social.

Soient $P^D(x)$ et $P^S(y)$ les fonctions de demande et d'offre inverse sur le marché du bien 1.

Sur une même figure, posons $x = y = q$ et représentons ces courbes. Pour toute quantité q, l'aire de la surface délimitée par les courbes représentative des fonctions de demande et d'offre, comprise entre l'origine et la quantité q, s'appelle le *surplus social*. C'est la différence entre la quantité maximale de numéraire que les consommateurs sont disposés à payer pour consommer le bien 1 en quantité q et le coût en numéraire que les entreprises doivent dépenser pour rendre le bien 1 disponible dans cette quantité.



Le surplus social est l'aire de la surface hachurée. Il est égal à :

$$W(q) = \int_0^q \left(P^D(t) - P^S(t)\right) dt.$$

En analyse d'équilibre partiel, le surplus social est un critère commode pour déterminer si un état économique est un état optimal ou non. En effet, si un état économique maximise le surplus social, alors c'est un état optimal au sens de Pareto.

4.5. Equilibre de marché et état optimal.

En analyse d'équilibre partiel, un équilibre de marché est simplement un prix qui égalise les quantités offerte et demandée sur le marché. On doit donc avoir simultanément

$$\begin{aligned} x &= q \\ y &= q \\ P^D(x) &= P^S(y) \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'un équilibre du marché se détermine, sur la figure précédente, à l'intersection des courbes d'offre et de demande inverse. Il s'agit du point (q^0, p^0). On voit qu'il est unique si la demande est décroissante et l'offre est croissante.

Pour déterminer un état optimal, on cherche la quantité q qui maximise le surplus social $W(q) = \int_0^q \left(P^D(t) - P^S(t)\right) dt$. Une solution de ce problème doit vérifier

$$P^D(q^0) - P^S(q^0) = 0,$$
$$P^D(q^0) - P^S(q^0) \text{ est localement décroissant.}$$

Sur la figure, l'état E^0 vérifie les deux conditions. Il est confondu avec l'équilibre de marché. On retrouve donc, en analyse d'équilibre partiel, la correspondance longuement étudiée au chapitre 3, entre les états optimaux au sens de Pareto et les équilibres de marché en concurrence parfaite.

4.6. Corrigé des exercices.

Exercice 4.1. Justifier l'interprétation de $v(x_1)$ et $v'(x_1)$. Montrer que $TMS_{12} = v'(x_1)$. Commenter ce résultat.

Définissons les deux états économiques :
- état initial : $x = (0, R)$;
- état final : $x' = (x_1, x_2)$.

On égalise l'utilité du consommateur dans l'état initial et dans l'état final

$$U(x) = v(0) + R = v(x_1) + x_2 = U(x')$$

Par hypothèse, $v(0) = 0$. Donc

$$v(x_1) = R - x_2.$$

Autrement dit, le consommateur est indifférent entre les deux états (son utilité est inchangée), s'il paye, pour avoir x_1 unités du bien 1, $v(x_1)$ unités de numéraire (entre l'état initial et l'état final, sa consommation de numéraire diminue de R à x_2). S'il paye plus, son utilité décroît ($U(x_1, x_2)$ croît avec x_2). Ceci justifie d'interpréter $v(x_1)$ comme la propension totale à payer le bien 1 en numéraire.

L'interprétation de $v'(x_1)$ comme propension marginale à payer le bien 1 en numéraire découle immédiatement du premier résultat. Si $v(x_1)$ est la somme maximale que le consommateur veut bien payer en bien 2 pour obtenir x_1 unités du bien 1, alors $v'(x_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(x_1+\varepsilon)-v(x_1)}{\varepsilon}$ est la somme maximale qu'il veut bien payer en bien 2 pour avoir une unité infiniment petite du bien 1 en plus.

Par définition, on a

$$TMS_{12} = \frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = \frac{v'(x_1)}{1} = v'(x_1).$$

On constate que le taux marginal de substitution du bien 1 par le numéraire dépend seulement de la quantité de bien 1 consommée, pas de la quantité de numéraire consommée. Cette propriété implique (voir le cours) que la demande du bien 1 dépend seulement du prix du bien 1, pas du revenu du consommateur. Donc, dans le cas d'une fonction quasi-linéaire, tant que les prix sur les autres marchés restent constants, le marché du bien 1 peut réellement être étudié indépendamment des autres marchés, par absence d'effets de revenu.

Exercice 4.2. Soit un consommateur caractérisé par son revenu R et sa fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, définie sur $[0, 1] \times R$, avec $v(x_1) = (1 - x_1/2)\, x_1$. Déterminer $d(p)$ et $p^d(x)$.

L'équilibre du consommateur $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ vérifie

$$\begin{gathered} v'\left(x_1^0\right) = 1 - x_1^0 = p \\ px_1^0 + x_2^0 = R \end{gathered}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 1 - p, \\ x_2^0 &= R - px_1^0 = R - p(1-p). \end{aligned}$$

La première équation définit la fonction de demande directe

$$d(p) = 1 - p.$$

La fonction de demande inverse étant l'inverse de la fonction de demande directe, on a, pour tout x,

$$d\left(p^d(x)\right) = 1 - p^d(x) = x \Longleftrightarrow p^d(x) = 1 - x.$$

Exercice 4.3. En reprenant les données de l'exercice 4.2, donner l'expression du surplus du consommateur. On utilisera les deux expressions du surplus données ci-dessus.

En utilisant la première définition, on obtient

$$\text{Surplus} = v(x) - px = (1 - x/2 - p)\, x.$$

En utilisant la seconde définition, on obtient

$$\text{Surplus} = \int_0^x (1 - t - p)\, dt = \left[t - t^2/2 - pt\right]_0^x = (1 - x/2 - p)\, x.$$

Exercice 4.4. Justifier l'expression Surplus$= \int_0^x (p(t) - p)\, dt$ et l'interprétation graphique du surplus du consommateur.

On a montré que $p(x) = v'(x)$. Il s'ensuit que (on se souvient ici que $v(0) = 0$)

$$\int_0^x (p(t) - p)\, dt = \int_0^x (v'(t) - p)\, dt = [v(t) - pt]_0^x = v(x) - px = \text{Surplus}.$$

L'interprétation graphique du surplus découle directement de la première intégrale. Pour obtenir le surplus du consommateur, il faut faire la différence des aires sous la courbe $p(x)$, entre les abscisses 0 et x, et sous l'ordonnée $y = p$, entre les abscisses 0 et x.

Exercice 4.5. On suppose qu'il y a I consommateurs identiques intervenant sur le marché du bien 1. Leurs caractéristiques sont celles données à l'exercice 4.2. Donner les expressions de $D(p)$ et $P^D(x)$.

Pour tout p, on a

$$D(p) = 100d(p) = 100(1 - p).$$

Pour tout x, on a

$$D\left(P^D(x)\right) = 100\left(1 - P^D(x)\right) = x \Longleftrightarrow P^D(x) = 1 - x/100.$$

Exercice 4.6. Etudier la fonction de coût $C(y) = (1/3)\, y^3 - (1/2)\, y^2 + y$.

On a

$$\begin{aligned} Cm &= C'(y) = y^2 - y + 1 \\ CM &= \frac{C(y)}{y} = (1/3)\, y^2 - (1/2)\, y + 1 \\ C''(y) &= 2y - 1 \end{aligned}$$

Pour faire la représentation graphique, notons que :

- $\forall y, Cm > 0$: en effet, l'équation $y^2 - y + 1 = 0$ n'a pas de solution $(\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0)$. Donc $Cm = y^2 - y + 1$ a toujours même signe. Comme $C'(0) = 1$, le coût marginal est positif. On en déduit que $C(y)$ est strictement croissant.

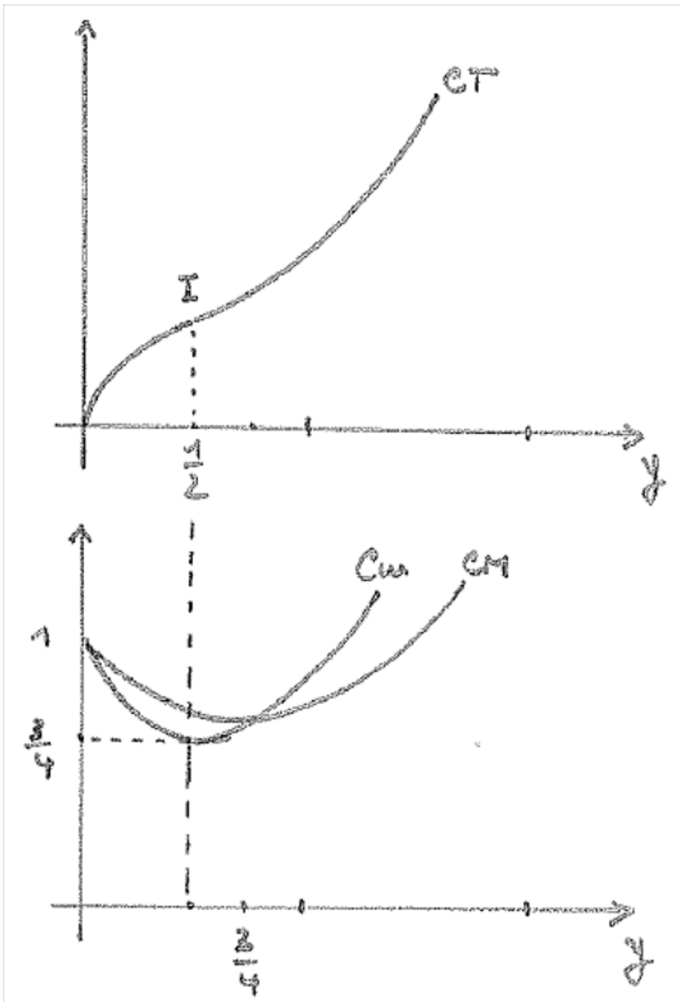
- $C(y)$ est concave pour $y < 1/2$, convexe pour $y > 1/2$ ($y = 1/2$ est un point d'inflexion) : en effet, $C''(y) = 2y - 1$. On a donc $C''(y) < 0$ pour $y < 1/2$ et $C''(y) > 0$ pour $y > 1/2$.

- Cm est minimum pour $y = 1/2$: en effet, l'étude du signe de $C''(y)$ montre que Cm décroît si $y < 1/2$ et croît si $y > 1/2$.

- CM est minimum pour $y = 3/4$: en effet, on a $\partial CM/\partial y = (2/3)\, y - 1/2$. Donc, CM décroît si $y < 3/4$ et croît si $y > 3/4$.

- $Cm = CM$ quand CM est minimum (pour $y = 3/4$) : en effet, on a $y^2 - y + 1 = (1/3)\, y^2 - (1/2)\, y + 1 \Leftrightarrow 2/3y - 1/2 = 0 \Leftrightarrow y = 3/4$.

La représentation graphique de ces fonctions est donnée ci-dessous.



Exercice 4.7. Déterminer les fonctions d'offre directe $s\left(p\right)$ et inverse $p^{s}\left(y\right)$ de l'entreprise décrite dans l'exercice 4.6. En supposant qu'il y a J entreprises identiques sur le marché, déterminer les fonctions d'offre directe $S\left(p\right)$ et inverse $P^{S}\left(y\right)$ sur le marché.

On a vu dans l'exercice que le coût marginal de l'entreprise est $Cm = y^2 - y + 1$ et qu'il est non décroissant pour $y \geqslant 1/2$.

Pour tout p, la quantité offerte y^0 par l'entreprise est solution de

$$\begin{aligned} Cm &= y^2 - y + 1 = p \\ y &\geqslant 1/2 \end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'équation

$$y^2 - y + (1-p) = 0.$$

On a

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1-p) = 4p - 3$$

On a une solution ssi $\Delta \geqslant 0 \Longleftrightarrow p \geqslant 3/4$. A cette condition, on doit arbitrer entre deux solutions (confondues si $p = 3/4$)

$$1/2\left(1-\sqrt{4p-3}\right) \text{ et } 1/2\left(1-\sqrt{4p-3}\right)$$

Comme on limite notre recherche à la région où le coût marginal est croissant, on doit éliminer la première solution (en effet $\frac{1-\sqrt{4p-3}}{2} < 1/2$). Finalement, on a

$$\begin{aligned} s(p) &= 0, \text{ si } p < 3/4, \\ &= 1/2\left(1-\sqrt{4p-3}\right), \text{ sinon.} \end{aligned}$$

La fonction d'offre inverse est plus directe à écrire. On sait en effet qu'elle est confondue avec le coût marginal de l'entreprise, pour sa partie croissante. Donc

$$\begin{aligned} p^s(y) &= \text{non définie, si } y < 1/2, \\ &= y^2 - y + 1, \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Pour l'offre sur le marché, on a

$$\begin{aligned} S(p) &= 0, \text{ si } p < 3/4, \\ &= (J/2)\left(1-\sqrt{4p-3}\right), \text{ sinon.} \end{aligned}$$

et, pour tout $y \geqslant 1/2$

$$S\left(P^S(y)\right) = (J/2)\left(1-\sqrt{4P^S(y)-3}\right) = y$$

et on trouve

$$\begin{aligned} P^S(y) &= (1-2y/J)^2 + 3/4 \\ &= \frac{4}{J^2}y^2 - \frac{4}{J}y + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

A JETER ?

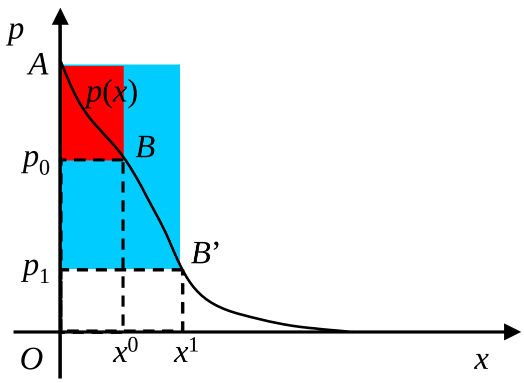
Considérons la situation où le prix du bien 1 passe de p_0, dans l'état initial, à p_1, dans l'état final, avec $p_0 > p_1$. On veut mesurer la variation de l'utilité du consommateur. On peut le faire soit par le calcul, soit à l'aide d'un graphique.

(i) Par le calcul. Dans l'état initial, le consommateur achète le bien 1 en quantité x^0 telle que $v'\left(x^0\right) = p_0$ et le bien numéraire en quantité $m^0 = R - px^0$. Dans l'état final, le consommateur achète le bien 1 en quantité x^1 telle que $v'\left(x^1\right) = p_1$ et le bien numéraire en quantité $m^1 = R - px^1$. La variation de l'utilité entre l'état final et l'état initial est donc égale à

$$\begin{aligned}
\Delta &= U\left(m^1, x^1\right) - U\left(m^0, x^0\right) \\
&= \left(m^1 + v\left(x^1\right)\right) - \left(m^0 + v\left(x^0\right)\right) \\
&= \left(v\left(x^1\right) - p_1 x^1\right) - \left(v\left(x^0\right) - p_0 x^0\right) \\
&= \int_0^{x_1} \left(p\left(t\right) - p_1\right) dt - \int_0^{x_0} \left(p\left(t\right) - p_0\right) dt
\end{aligned}$$

Elle est égale à la différence entre le surplus du consommateur dans l'état final et dans l'état initial.

(ii) Graphiquement. En utilisant les résultats ci-dessus, on voit que la variation de l'utilité est la différence entre les aires des zones coloriées sur la figure ci-dessous. Ces aires correspondent au surplus du consommateur.



Dans l'état initial, le surplus du consommateur est l'aire de la surface p_0AB (en rouge sur la figure). En effet, l'utilité que lui procure la quantité x^0 est égale à l'aire sous la courbe $p\left(x\right)$ entre les quantités 0 et x^0. Au maximum, le consommateur est prêt à payer cette somme en numéraire (sinon, mieux vaut conserver son revenu et le dépenser intégralement dans le bien numéraire). Comme il paye seulement $p_0 x^0$ sur le marché pour se procurer cette quantité, ceci lui laisse un surplus égal à l'aire de p_0AB.

De même, dans l'état final, le surplus du consommateur est l'aire de la surface p_1AB' (en bleu sur la figure).

Finalement, on note que la variation du surplus du consommateur entre l'état intial et l'état final est $p_1AB' - p_0AB$, et correspond à la mesure de Δ obtenue par le calcul.