Chapitre 3. Optimum économique et équilibre de marché.

3.1. Problématique et définitions.

On étudie désormais l'économie à l'échelle de la collectivité.

On suppose qu'il y a I consommateurs, indicés $i = 1, 2, ..., I$, J producteurs, indicés $j = 1, 2, ..., J$, et K biens, indicés $k = 1, 2, ..., K$.

On veut définir, analyser, puis comparer, les notions d'optimum économique et d'équilibre de marché. La notion d'optimum économique renvoie à l'idée de meilleur choix possible pour la collectivité ; la notion d'équilibre de marché traduit un type d'organisation de l'économie, où la coordination des plans individuels (des consommateurs et des producteurs) se fait au moyen d'un système de marchés et de prix.

Il faut au préalable donner une définition formelle de ces notions.

3.1.1. Etats économiques.

Un état de l'économie est un ensemble de plans de consommation x_i, pour chaque consommateur i, et de plans de production y_j, pour chaque producteur j. Un état économique se note $E\left(x_i, i = 1, 2, ..., I; y_j, j = 1, 2, ..., J\right)$ ou $E\left(x, y\right)$.

On appelle *état possible* de l'économie un état $E\left(x, y\right)$ qui vérifie :

(i) Pour tout i, x_i appartient à l'ensemble des consommations possibles X_i du consommateur i ;

(ii) Pour tout j, y_j appartient à l'ensemble des productions possibles Y_j du producteur j ;

(iii) Pour chaque bien k, on a l'*égalité des emplois et des ressources*

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ik} = \sum_{j=1}^{J} y_{jk} + w_k,$$

où w_k est la *dotation initiale* de l'économie en bien k.

3.1.2. Etats optimaux au sens de Pareto.

Pour donner un contenu opérationnel à l'idée de meilleur état économique, on utilise la notion d'état optimal au sens de Pareto, qui prend appui sur les préférences des agents.

Un état $E^0\left(x^0, y^0\right)$ est un *état optimal au sens de Pareto* s'il est possible et s'il n'existe aucun autre état possible E^1 tel que

$$U^i\left(x_i^1\right) \geqslant U^i\left(x_i^0\right), \text{ pour tout } i,$$

avec l'inégalité stricte pour au moins un consommateur.

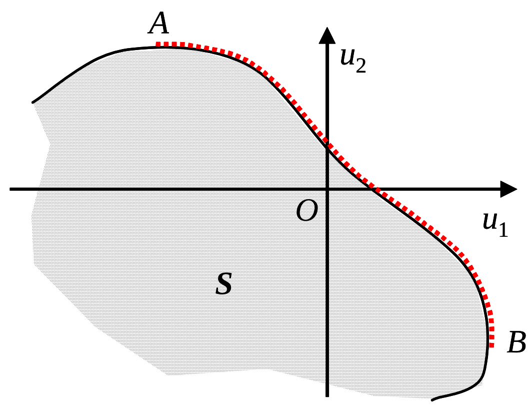
Un état optimal au sens de Pareto est donc un état possible tel que toute modification de cet état (pour aller vers un autre état **possible**) induit une perte pour au moins un consommateur.

Cette notion permet de classer les états économiques en deux ensembles. Ceux qui vérifient la condition forment l'ensemble des états optimaux au sens de Pareto ; les autres ne sont pas optimaux. Cette définition induit donc un ordre **partiel** sur les états économiques. En particulier, elle ne permet pas de comparer entre eux deux états optimaux au sens de Pareto. En ce sens, deux états optimaux doivent donc être considérer comme équivalents. Pour aller plus loin, il faudrait définir une fonction de bien-être social.

Pour une économie donnée (en particulier, pour des préférences de consommateurs, pour des technologies des producteurs et pour des dotations initiales données), on construit un *ensemble des possibilités d'utilité* en associant à tout état économique possible $E(x, y)$ le vecteur $\left(U^1(x_1), U^2(x_2), ..., U^I(x_I)\right)$ des utilités obtenues par les consommateurs. C'est un sous-ensemble de R^I.

Par définition, tout vecteur d'utilités $(u_1, u_2, ..., u_I)$ pris dans cet ensemble est possible, au sens où il existe un état économique possible donnant l'utilité u_1 au consommateur 1, u_2 au consommateur 2, etc. Par contre, un vecteur d'utilités $(u_1, u_2, ..., u_I)$ pris en dehors de cet ensemble n'est pas possible **pour cette économie**. Enfin, il est clair que l'ensemble des états optimaux au sens de Pareto correspond à la frontière Nord-Est de cet ensemble.

La figure suivante représente ces différentes notions pour une économie comportant deux consommateurs. L'ensemble des possibilités d'utilité est l'ensemble grisé. La frontière de Pareto est la courbe AB en pointillés.



3.*1.3. Equilibres de marché.*

On appelle *équilibre de marché* un état défini par des plans de consommation x_i et des revenus R_i, pour chaque consommateur i, des plans de production y_j, pour chaque producteur j, et des prix p_k, pour chaque bien k, état qui satisfasse l'égalité des emplois et des ressources, état dans lequel chaque consommateur maximise son utilité sous sa contrainte de budget (sa dépense est bornée par

R_i) et chaque entreprise maximise son profit sous sa contrainte technologique, les uns et les autres considérant les prix comme donnés.

3.2. Economie d'échange pure.

Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de producteurs et que l'activité économique se réduit à l'échange des dotations initiales.

Dans ce cas, un état économique est possible si les plans de consommation $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ des i consommateurs appartiennent à X_i et vérifient $\sum_{i=1}^{I} x_{ik} = w_k$, en rappelant que w_k détermine la dotation initiale de l'économie en bien k.

3.2.1. Prix associés à un optimum de distribution.

On cherche d'abord les propriétés d'un état optimal.

Si E^0 est un état optimal, il doit **notamment** maximiser l'utilité du consommateur 1, sous la contrainte que les utilités des autres consommateurs restent au moins égales à leur valeur en l'état E^0. Sous l'hypothèse que E^0 est intérieur aux ensembles X_i, $E^0 \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_I^0\right)$ maximise donc $U^1\left(x_1\right)$ sous les contraintes $U^i\left(x_i\right) \geqslant U^i\left(x_i^0\right)$, $i = 2, 3, ..., I$, et $\sum_{i=1}^{I} x_{ik} = w_k$, $k = 1, 2, ..., K$.

En vertu du théorème du Lagragien, on sait que si E^0 est solution de ce problème, il existe des multiplicateurs λ_i $(i = 2, 3, ..., I)$ et μ_k $(k = 1, 2, ..., K)$ non tous nuls et une fonction Lagrangienne (pour simplifier l'écriture, on pose dans cette expression $\lambda_1 = 1$, et on maximise en fait $\lambda_1 \left(U^1\left(x_1\right) - U^1\left(x_1^0\right)\right)$)

$$L\left(x\right) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left[U^i\left(x_i\right) - U^i\left(x_i^0\right)\right] - \sum_{k=1}^{K} \mu_k \left[\sum_{i=1}^{I} x_{ik} - w_k\right]$$

dont les dérivées premières par rapport aux x_{ik} évaluées en E^0 sont toutes nulles

$$\frac{\partial}{\partial x_{ik}} L\left(x\right) = \lambda_i U_k^{i\prime}\left(x_i^0\right) - \mu_k = 0,\ i = 1, 2, ..., I,\ k = 1, 2, ..., K.$$

En utilisant ce résultat, il vient que E^0 vérifie (en supposant que μ_1 est non nul)

$$TMS_{k1}^i = \frac{U_k^{i\prime}\left(x_i^0\right)}{U_1^{i\prime}\left(x_i^0\right)} = \frac{\mu_k}{\mu_1}, \text{ pour tout } i \text{ et tout } k.$$

En d'autres termes, en un état économique optimal, le taux marginal de substitution de deux biens quelconques est égal entre tous les consommateurs.

Ce point est intuitif. Supposons que $TMS_{k1}^1 < TMS_{k1}^i$, c'est-à-dire que le consommateur 1 accorde moins de valeur au bien k, comparé au bien 1, que le consommateur i. (On se souvient que, pour tout i et tout k, TMS_{k1}^i donne le nombre d'unités du bien 1 compensant la perte d'une unité du bien k.) Donc, si $TMS_{k1}^1 < TMS_{k1}^i$, il y a place pour un échange mutuellement avantageux entre ces deux consommateurs (le consommateur 1 cède une unité de bien k au consommateur i). Le résultat serait le même si on supposait que $TMS_{k1}^1 > TMS_{k1}^i$.

Il existe une similitude évidente entre ces conditions, caractérisant un état optimal, et celles vues au chapitre 2, caractérisant un équilibre du consommateur. Rappelons que si un plan de consommation x_i^0 est un équilibre du consommateur i pour les prix p et le revenu R_i, il vérifie

$$TMS_{k1}^i = \frac{U_k^{i\prime}\left(x_i^0\right)}{U_1^{i\prime}\left(x_i^0\right)} = \frac{p_k}{p_1}, \text{ pour tout } k,$$
$$\sum_{k=1}^{K} p_k x_{ik}^0 = R_i.$$

Alors, considérons un état optimal E^0 quelconque. Il vérifie les conditions ci-dessus pour des nombres μ_k $(k = 1, 2, ..., K)$ donnés. Choisissons maintenant des prix p, vérifiant $p_k/p_1 = \mu_k/\mu_1$, pour tout k, et des revenus $R_1, R_2, ..., R_I$, vérifiant $R_i = \sum_{k=1}^{K} p_k x_{ik}^0$, pour tout i. Puisque l'état E^0 est un état optimal au sens de Pareto, il vérifie l'égalité des emplois et des ressources pour chaque bien (les utilités sont croissantes). Par construction, pour chaque consommateur i, l'état E^0, les prix p et le revenus R_i ainsi obtenus vérifient les conditions nécessaires pour être un équilibre de chaque consommateur. Si ces conditions s'avèrent également suffisantes, on aura associé à un état optimal quelconque un équilibre de marché. Or, on montre que ces conditions sont suffisantes si les fonctions d'utilité sont stritement quasi-concaves (hypothèse 2.4).

Théorème 3.1. (Premier théorème de l'économie du bien-être ; cas d'une économie d'échange pure). Si E^0 est un optimum de distribution, tel que, pour chaque consommateur i, x_i^0 soit intérieur à X_i et si les fonctions d'utilité U^i et les ensembles X_i vérifient les hypothèses 2.1 à 2.4, alors il existe des prix p_k et des revenus R_i tels que x_i^0 maximise $U^i\left(x_i\right)$ sous la contrainte budgétaire $p \cdot x_i \leqslant R_i$, et ceci pour tout i. L'état E^0, les prix p_k et les revenus R_i définissent alors un équilibre de marché.

3.2.2. Représentation graphique.

Dans le cas où il y a 2 consommateurs $(i = 1, 2)$ et 2 biens $(k = 1, 2)$, une représentation graphique de ces résultats est possible, prenant la forme de la boîte d'Edgeworth.

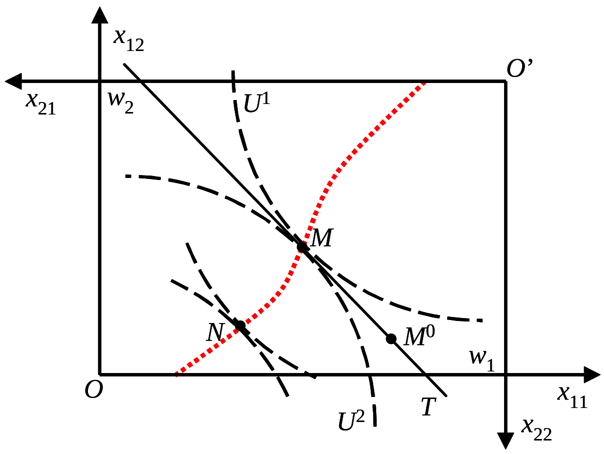
On suppose que $X_1 = X_2 = R_+^2$.

Dans un repère d'origine O, on porte x_{11} et x_{12}, les consommations de biens 1 et 2 par le consommateur 1. Ces quantités sont bornées par la dotation initiale w_1 et w_2 de l'économie.

L'équilibre des emplois et des ressources implique que $x_{11} + x_{21} = w_1$ et $x_{12} + x_{22} = w_2$.

Soit $O' = (w_1, w_2)$. Du fait de l'équilibre des emplois et des ressources, pour tout point $M = (x_{11}, x_{12})$, qui donne un plan de consommation du consommateur 1, on lit directement le plan de consommation associé du consommateur 2, comme les composantes du vecteur $MO' = (x_{21}, x_{22}) = (w_1 - x_{11}, w_2 - x_{12})$ ou encore, comme les coordonnées du point M par rapport aux axes d'origine O' et orientés dans le sens opposé aux axes du consommateur 1. Dans ce graphique, on peut représenter les courbes d'indifférence de 1 et 2 respectivement par rapport aux systèmes d'axes d'origine O et O'.

Un point M est un état optimal s'il est à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth (il est alors possible), si les courbes d'indifférence des consommateurs passant par M sont tangentes et si la courbe d'indifférence de 2 n'a aucun point au Nord-Est de la courbe d'indifférence de 1. Sur la figure, M et N sont deux états optimaux, de même que tous les points de la courbe en pointillés. Le taux marginal de substitution en M est donné par la pente de la tangente T aux deux courbes d'indifférence passant par M. On retrouve donc la condition d'égalité des taux marginaux de substitution des deux consommateurs. Cette condition est suffisante si les fonctions d'utilité sont quasi-concaves (car alors, la courbe d'indifférence de 2 a biens tous ses points au Sud-Ouest de la courbe d'indifférence de 1).

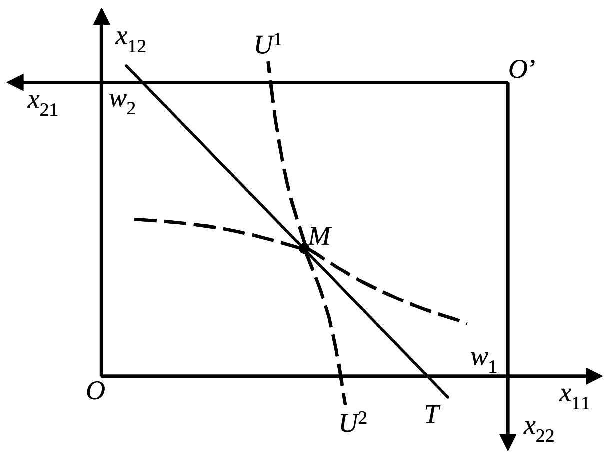


L'état M est aussi un équilibre de marché pour des prix p_1 et p_2 tels que p_2/p_1 soit égal à la pente de la tangente T (en valeur absolue) et pour des revenus R_1 et R_2 tels que $p_1 x_{11}^M + p_2 x_{12}^M = R_1$ et $p_1 x_{21}^M + p_2 x_{22}^M = R_2$. Pour ces prix et ces revenus, la droite de budget des consommateurs 1 et 2 se confond avec la droite T. Tous les points sous la droite de budget T sont accessibles du consommateur 1, mais lui donne une utilité moindre qu'en M ; tous les points au-dessus de M lui sont inaccessibles. Donc le plan de consommation M est un équilibre du consommateur 1 pour ces prix et ce revenu. Il en est de même pour le consommateur 2. En d'autres termes, M est un équilibre de marché.

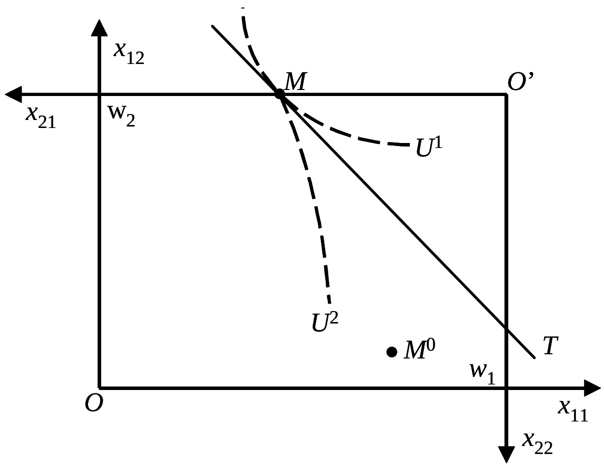
3.2.3. Relâchement des conditions du théorème.

On peut utiliser la boîte d'Edgeworth pour suggérer que certaines conditions du premier théorème de l'économie du bien-être ne lui sont pas nécessaires.

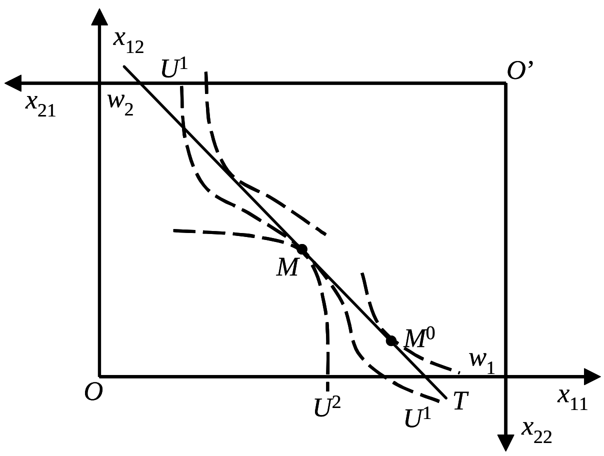
La figure suivante montre que, même si on abandonne l'hypothèse 2.3 de différentiabilité des fonctions d'utilité, on peut encore associer un équilibre de marché à un état optimal. Sur cette figure, on voit que les fonctions d'utilité ne sont pas différentiables au point M. Ce point est un état optimal. Considérons les prix et les revenus tels que la droite de budget des deux consommateurs se confonde avec une tangente aux courbes d'indifférence au point M. Il est clair que, pour ces prix et ces revenus, M est aussi un équilibre de marché. On note, par contre, que le rapport des prix p_2/p_1 n'est pas défini de façon unique, puisqu'il existe plusieurs tangentes aux deux courbes d'indifférence passant par M.



La figure ci-dessous montre que le premier théorème de l'économie du bien-être est encore vrai quand l'état optimal n'est pas pris intérieur aux ensembles X_i. Dans cet exemple, l'état optimal M est tel que $x_{22} = 0$, c'est-à-dire sur la frontière de l'ensemble des consommations possibles X_2 du consommateur 2. Ce n'est donc pas une solution intérieure. Pourtant, en considérant des prix et des revenus, définissant comme droite de budget des deux consommateurs la droite T de la figure, le point M est un équilibre de marché et le premier théorème de l'économie du bien-être est encore valable. On note au passage que, pour un état optimal non intérieur, les courbes d'indifférence ne sont pas nécessairement tangentes et les taux marginaux de substitution ne sont pas nécessairement égaux.



Par contre, la figure suivante montre que l'hypothèse 2.4 de quasi-concavité des fonctions d'utilité est nécessaire au premier théorème de l'économie du bien-être. Une fonction d'utilité est quasi-concave si, et seulement si, les ensembles au-dessus de n'importe quelle courbe d'indifférence sont convexes. Donc, dans l'exemple ci-dessous, la fonction d'utilité de 1 n'est pas quasi-concave. Le point M est un état optimal au sens de Pareto, mais il n'est pas décentralisable par un équilibre de marché. En effet, le point M est un équilibre du consommateur 2 si, et seulement si, les prix et les revenus sont choisis tels que la droite T soit la droite de budget de 2. La droite T est alors aussi la droite de budget du consommateur 1. Or, sur cette ensemble, le consommateur préfère M^0.



3.2.4. Optimalité des équilibres de marché.

Le premier théorème de l'économie du bien-être admet une réciproque, appelée second théorème de l'économie du bien-être. Nous le presentons ci-dessous.

Considérons un état E^0, des prix p_k $(k = 1, 2, ..., k)$ et des revenus R_i $(i = 1, 2, ..., I)$. Supposons que cet état, ces prix et ces revenus définissent un équilibre de marché (x_i^0 maximise $U^i(x_i)$ sous la contrainte budgétaire $p \cdot x_i \leqslant p \cdot x_i^0 = R_i$, pour tout i).

Par l'absurde, on peut montrer que E^0 est un état optimal. Supposons qu'il existe un état E^1 vérifiant $U^i\left(x_i^1\right) \geqslant U^i\left(x_i^0\right)$, pour tout i, l'inégalité étant stricte pour au moins un i. Si $U^i\left(x_i^1\right) > U^i\left(x_i^0\right)$, le plan de consommation x_i^1 n'est pas accessible avec le budget $R_i = p \cdot x_i^0$ (sinon, x_i^0 ne serait pas un équilibre du consommateur i). On a donc $p \cdot x_i^1 > R_i$ pour l'individu i pour qui l'inégalité est stricte. Si $U^i\left(x_i^1\right) = U^i\left(x_i^0\right)$, le plan de consommation x_i^1 est ou n'est pas accessible avec le budget $R_i = p \cdot x_i^0$; mais s'il est accessible, il sature la contrainte de budget. Sinon, le consommateur i pourrait augmenter certaines composantes de x_i^1 et donc obtenir une utilité supérieure à celle de x_i^0, ce qui contredirait à nouveau le fait que x_i^0 soit un équilibre de i avec le budget $R_i = p \cdot x_i^0$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i^1 > R_i = \sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i^0,$$

soit

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^1 - \sum_{i=1}^{I} x_i^0\right) > 0.$$

Ceci est contradictoire avec l'égalité des emplois et des ressources

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^1 = \sum_{i=1}^{I} x_i^0 = w.$$

Théorème 3.2 (Second théorème de l'économie du bien-être ; cas d'une économie d'échange pure). Si E^0 est un état possible, s'il existe des prix $p_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, ..., K)$ tels que, pour tout $i = 1, 2, ..., I$, x_i^0 maximise $U^i(x_i)$ sous la contrainte budgétaire $p \cdot x_i \leqslant p \cdot x_i^0$, et si les fonctions d'utilité U^i et les ensembles X_i vérifient les hypothèses 2.1 et 2.2, alors E^0 est un état optimal au sens de Pareto.

3.3. Economie d'échange et de production.

Les deux théorèmes de l'économie du bien-être se transposent à une économie d'échange et de production. La correspondance entre l'ensemble des états optimaux au sens de Pareto et l'ensemble des équilibres de marché se montre de la même façon. On constate d'abord que les conditions nécessaires du premier ordre coïncident ; on détermine ensuite les hypothèses pour que les conditions du premier ordre soient aussi suffisantes.

Théorème 3.3. (Premier théorème de l'économie du bien-être ; cas général). Si E^0 est un état optimal tel que, pour chaque consommateur i, x_i^0 soit intérieur à X_i, si les fonctions d'utilité U^i et les ensembles X_i vérifient les hypothèses 2.1 à 2.4 et si, pour chaque entreprise j, l'ensemble des plans de production possibles y_j vérifiant $f_j(y_j) \leqslant 0$ est convexe, f_j étant une fonction différentiable dont toutes les dérivées premières ne sont pas simultanément nulles en y_j^0, alors il existe des prix p_k pour tous les biens et des revenus R_i pour tous les consommateurs, tels que :

(i) x_i^0 maximise $U^i(x_i)$ sous la contrainte budgétaire $p \cdot x_i \leqslant R_i$, pour tout i,

(ii) y_j^0 maximise $p \cdot y_j$ sous la contrainte technologique $f_j(y_j) \leqslant 0$, pour tout j.

L'état E^0, les prix p_k et les revenus R_i définissent alors un équilibre de marché.

Théorème 3.4. (Second théorème de l'économie du bien-être ; cas général). Si E^0 est un état possible, s'il existe des prix $p_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, ..., K)$ tels que, pour tout $i = 1, 2, ..., I$, x_i^0 maximise $U^i(x_i)$ sous la contrainte budgétaire $p \cdot x_i \leqslant p \cdot x_i^0$, et que, pour tout $j = 1, 2, ..., J$, y_j^0 maximise $p \cdot y_j$ dans Y_j, si les fonctions d'utilité U^i et les ensembles X_i vérifient les hypothèses 2.1 et 2.2, alors E^0 est un état optimal au sens de Pareto.

3.4. Portée et signification des théorèmes de l'économie du bien-être

Le premier théorème établit des conditions suffisantes (d'information, de rationalité et de concurrence parfaites, et de **convexité**) pour pouvoir décentraliser n'importe quel état optimal sous la forme d'un équilibre de marché (après redistribution des revenus).

Le second théorème énonce des conditions suffisantes (d'information, de rationalité et de concurrence parfaites) pour qu'un équillibre de marché décentralise un état optimal au sens de Pareto.

Ces conditions ne sont évidemment jamais réunies en réalité. Les agents ont une information imparfaite, aussi bien sur leur environnement (les prix) que sur leurs objectifs (leurs préférence ou leur technologie). Ils sont dotés d'une rationalité limitée. Les situations de concurrence imparfaite sont légions.

Une faiblesse du second théorème est qu'il met de côté toute considération de justice sociale, étant basé sur le critère de Pareto. Un équilibre de marché, même optimal au sens de Pareto, peut très bien être jugé indésirable, s'il est inégalitaire. Pour autant, ceci ne disqualifie les marchés comme organisation sociale, du fait du premier théorème de l'économie du bien-être.

3.5. Analyse descriptive de l'équilibre général

Nous avons caractérisé un équilibre de marché, en supposant qu'un tel état existait et était rejoint par l'économie. On étudie ici la question de l'existence et de la stabilité de l'équilibre général. On se contentera d'une présentation simplifiée, limitée au cas d'une économie d'échange pure.

3.5.1. Economie de propriété privée.

Une économie de *propriété privée* est une économie dans laquelle chaque consommateur possède une dotation initiale w_i de biens (en particulier, sa force de travail), élément de l'espace des biens R^K, et en use librement. La dotation initiale de l'économie se déduit des dotations individuelles et vérifie $w_k = \sum_{i=1}^{I} w_{ik}$, pour tout k.

Dans une économie de propriété privée, le revenu d'un consommateur est déterminé par la valeur sur le marché de sa dotation initiale. Il est donc endogène. Formellement, pour tout vecteur de prix p, le revenu R_i du consommateur i est égal à $R_i = \sum_{k=1}^{K} p_k w_{ik}$.

3.5.2. *Equilibre général des marchés.*

Considérons comme données les dotations initiales w_i et les fonctions de demande nette $d_i(p, R_i)$ des consommateurs. (On se souvient que $d_i(p, R_i)$ donne le plan de consommations qui maximise l'utilité $U^i(x)$ du consommateur i dans l'ensemble des plans de consommation possibles pour lui, c'est-à-dire vérifiant $x_i \in X_i$ et $p \cdot x_i \leqslant R_i$.)

Par définition, l'économie admet un équilibre de marché s'il existe des prix p_k, $k = 1, 2, ..., K$, tels que tous les marchés sont équilibrés simultanément. Dans une économie de propriété privée, les revenus dépendant des dotations initiales et des prix, un vecteur de prix d'équilibre vérifie

$$\begin{array}{l} R_i = \sum_{k=1}^{K} p_k w_{ik}, \text{ pour tout } i, \\ \sum_{i=1}^{I} d_{ik}(p, R_i) = w_k, \text{ pour tout } k. \end{array}$$

En remplaçant R_i par sa valeur, un équilibre de marché est la donnée de K prix, vérifiant le système comportant K équations

$$d_k(p) = \sum_{i=1}^{I} d_{ik}(p, p \cdot w_i) = w_k, \text{ pour tout } k,$$

en définissant $d_k(p)$ la demande globale pour le bien k.

On se souvient que les fonctions de demande nette sont homogène de degré 0 en p et R_i. Il en découle que le système est homogène de degré 0 par rapport aux prix. Par conséquent, il ne permet de déterminer que les prix relatifs, un prix étant choisi arbitrairement ; il lie $K-1$ inconnues selon K équations.On en vient à se demander si ces K équations entre $K-1$ inconnues sont compatibles. On répond par l'affirmative, car les fonctions de demande vérifient :

$$\sum_{k=1}^{K} p_k \left(d_{ik}(p, p \cdot w_i) - w_{ik}\right) = 0,$$

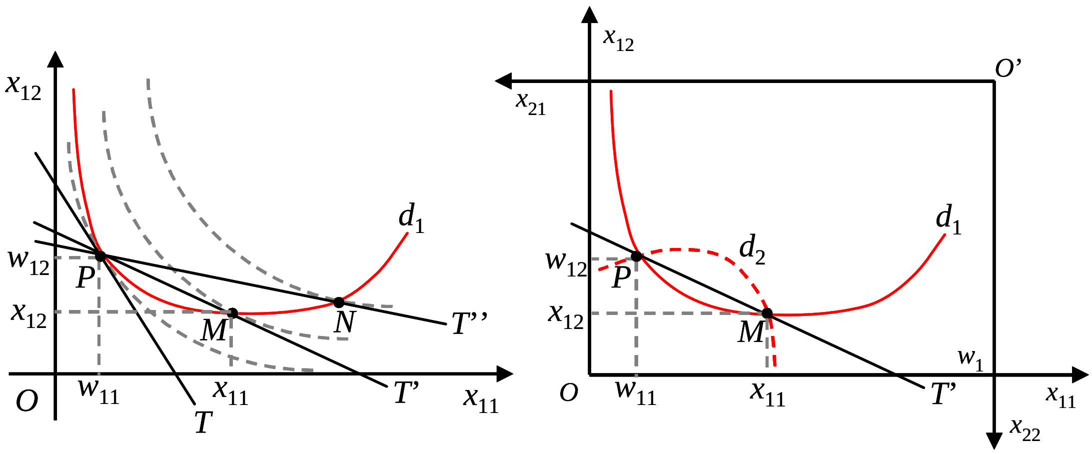
puisque chaque consommateur sature son budget. Ceci implique

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} p_k\left(d_{ik}-w_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{K} p_k\sum_{i=1}^{I}\left(d_{ik}-w_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{K} p_k\left(d_k-w_k\right)=0.$$

Autrement dit, du fait que les consommateurs dépensent l'intégralité de leur budget, la réalisation de l'équilibre sur $K-1$ marchés (par exemple, $d_k=w_k$ pour $k=1,...,K-1$) implique la réalisation de l'équilibre sur le K-ième marché. On appelle *loi de Walras* cette propriété. Elle implique qu'une des équations du système est redondante.

3.5.3. Représentation graphique de l'équilibre général.

Sur la figure ci-dessous, on représente, à gauche, la détermination de l'équilibre du consommateur 1, en fonction de sa dotation initiale (w_{11}, w_{12}), de ses courbes d'indifférence et des prix (p_1, p_2), et, à droite, la boîte d'Edgeworth, dans laquelle on reporte la "fonction de demande" du consommateur 1 ainsi obtenue et, de même, celle du consommateur 2.



Commentons d'abord la figure de gauche. La dotation initiale est donnée par le point P (par hypothèse). C'est aussi l'équilibre du consommateur, pour des prix donnant la droite de budget PT. Le point M serait l'équilibre du consommateur pour la droite de budget PT'. Le point N serait l'équilibre du consommateur pour la droite de budget PT''. En procédant pareillement pour toutes les droites de budget passant par le point P, on construit la demande du consommateur 1, sous la forme de la courbe d_1. On note qu'elle est toujours au-dessus de la courbe d'indifférence passant par le point P. Cette information est ensuite reportée sur la figure de droite.

Commentons maintenant la figure de droite. La dotation initiale est donnée par le point P. Les demandes des consommateurs 1 et 2, obtenues par la méthode vue ci-dessus, sont données respectivement par les courbes d_1 et d_2. Elles sont sécantes aux points P et M. Le point M définit un équilibre général : sachant que les prix (p_1, p_2) et la droite de budget associée PT', les demandes des deux consommateurs s'équilibrent.

3.5.4. Existence d'un équilibre général.

Le fait que le système définissant un équilibre général comporte le même nombre d'inconnues que d'équations ne suffit à garantir l'existence d'une solution. On étudie ici les conditions suffisantes d'existence d'un équilibre général, découverte par Debreu.

La démonstration repose sur un théorème de point fixe.

On dit qu'une fonction f admet un *point fixe* s'il existe x^* tel que $f(x^*) = x^*$. Le théorème du point fixe de Brouwer établit que : Si une fonction f, définie sur un ensemble convexe, fermé et borné, dans lui-même, est continue, alors cette fonction admet un point fixe.

La démonstration de l'existence d'un équilibre de marché procède alors comme suit. Les fonctions de demande $d_k(p)$ étant bornées, on choisit des nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ pour que la fonction

$$\varphi : (p_1, p_2, ..., p_K) \to (p_1 + \lambda_1 (d_1(p) - w_1), p_2 + \lambda_2 (d_2(p) - w_2), ..., p_K + \lambda_K (d_K(p) - w_K))$$

soit définie d'un ensemble convexe, fermé et borné dans lui-même. On note que la fonction est continue (les fonctions de demande nette sont continues). On sait alors que cette fonction admet un point fixe p^*. On vérifie que ce point fixe est en fait un équilibre de marché, puisque

$$\varphi(p^*) = p^* \Rightarrow \lambda_k (d_k(p^*) - w_k) = 0, \text{ pour tout } k.$$

On a alors déterminé un vecteur de prix qui équilibre tous les marchés, c'est-à-dire un équilibre général.

3.5.5. Unicité et stabilité de l'équilibre général.

Pour l'unicité et la stabilité de l'équilibre, on a besoin d'une hypothèse *ad-hoc*, dite hypothèse de substituabilité brute.

La demande globale d'un bien k quelconque vérifie l'*hypothèse de substituabilité brute* si c'est une fonction strictement croissante du prix des autres biens.

$$\frac{\partial}{\partial p_{k'}} d_k(p) > 0, \text{ pour tout } k' \neq k.$$

Sous cette hypothèse, du fait de l'homogénéité de degré 0 des fonctions de demande, la demande globale d'un bien quelconque est une fonction strictement décroissante de son prix : $\frac{\partial}{\partial p_k} d_k(p) > 0$, pour tout k.

Et tout équilibre général est localement stable pour le processus de tâtonnement en temps continu

$$\frac{dp_k}{dt} = \lambda_k \left(d_k \left(p\right) - w_k\right), \ \lambda_k > 0, \text{ pour tout } k,$$

où l'accroissement instantané du prix des biens est proportionnel à l'excès de la demande sur l'offre.

Remarque 3.1. On rappelle que x^* est un *point d'équilibre* du système différentiel $dx/dt = f\left(x\right)$ si $f\left(x^*\right) = 0$. Il est localement stable s'il existe un voisinage de ce point tel que, pour tout x pris dans ce voisinage, la solution $x\left(t\right)$ du système converge vers x^* quand t tend vers l'infini.