Chapitre 2. Le consommateur.

2.1. Le problème du consommateur

On s'intéresse à la consommation de biens d'un consommateur donné.

On définit un *plan de consommation* du consommateur comme la donnée de sa consommation de chaque bien k. Formellement, c'est un point x dans l'espace des biens R^K.

On appelle *ensemble de consommation* du consommateur l'ensemble des plans de consommation satisfaisant ses besoins vitaux. C'est un sous-ensemble X de l'espace des biens R^K.

Remarque 2.1. Dans X, la consommation d'un bien par le consommateur peut être négative (Cf., par exemple, le temps, la demande de loisir et l'offre de travail).

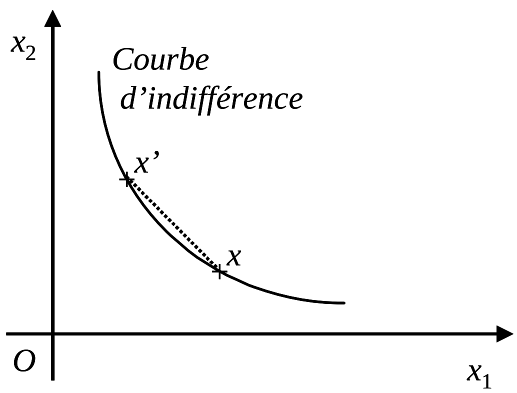
2.2. Préférences du consommateur.

On admet que, face à deux plans de consommation quelconques, le consommateur peut dire s'il préfère l'un, l'autre, ou s'il est indifférent. On admet ensuite que ces préférences peuvent être représentées par une *fonction d'utilité*, associant à tout plan de consommation x dans R^K un nombre $U(x)$ ayant l'interprétation suivante :

$$U(x_0) > U(x_1) \Leftrightarrow \text{le consommateur préfère } x_0 \text{ à } x_1.$$

2.3 Notions dérivées

On définit une *courbe d'indifférence* du consommateur comme un ensemble de points de l'espace des biens R^K équivalents au sens des préférences du consommateur. Tous les points x d'une même courbe d'indifférence ont même utilité $U(x) = u$.

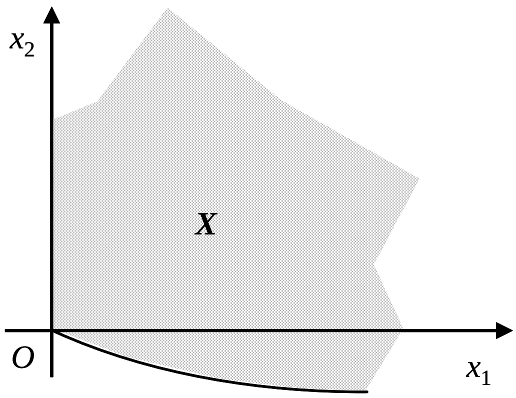


Exercice 2.1. Représenter la courbe d'indifférence $U(x) = 1$ quand le consommateur est caractérisé par l'ensemble de consommation $X = \left(R_+^*\right)^2$ et la fonction d'utilité $U(x) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ définie sur X.

2.3 Propriétés des préférences

On expose et on commente ici les hypothèses utilisées par la suite.

Hypothèse 2.1 : L'ensemble de consommation X vérifie les propriétés :
- il est convexe, fermé et borné inférieurement ;
- il contient le vecteur nul ;
- il vérifie : si $x \in X$ et $x' \geqslant x$, alors $x' \in X$.



Hypothèse 2.2 : La fonction d'utilité U est définie sur X, continue et croissante :

$$\text{Si } x' > x, \text{ alors } U(x') > U(x).$$

En d'autres termes, le consommateur n'est jamais saturé de consommation.

Hypothèse 2.3 : La fonction d'utilité U est différentiable deux fois. Ses dérivées premières ne sont jamais toutes simultanément nulles.

Hypothèse 2.4 : La fonction d'utilité U est strictement quasi-concave :

$$\forall t,\ 0 < t < 1, \text{ on a } U(tx + (1-t)x') > \min\{U(x), U(x')\}$$

Autrement dit, l'ensemble des plans de consommation préférés à un plan de consommation x quelconque est strictement convexe. Une justification de cette hypothèse peut être un goût du consommateur pour la variété.

2.3 Substitution et valeur

La notion de valeur se confond avec celle de termes d'échange entre les biens. Pour le consommateur, la valeur d'un bien se définit par rapport aux autres biens, en comparant leurs capacités respectives à lui procurer une satisfaction.

On définit le *taux marginal de substitution du bien 1 par le bien 2*, noté TMS_{12}, comme le ratio

$$TMS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)}.$$

Cette notion correspond graphiquement à la pente de la courbe d'indifférence au point x (en valeur absolue) dans le plan (O, x_1, x_2). C'est la valeur du quotient dx_2/dx_1, quand $dx_1 \to 0$ et quand dx_2 est choisi pour maintenir $U(x)$ inchangé.

Un raisonnement simple permet d'en retrouver l'expression. Soient x et $x + dx$ deux plans de consommation. Si la fonction d'utilité est différentiable, l'utilité en ces deux points est liée par la relation

$$U(x + dx) = U(x) + \sum_{k=1}^{K} U_k'(x)\, dx_k + o(dx).$$

Supposons que $dx_k = 0$, sauf pour les biens 1 et 2, et que $U(x + dx) = U(x)$ (par définition du TMS_{12}, le consommateur est indifférent entre les deux plans de consommation). On a l'égalité

$$U_1'(x)\, dx_1 + U_2'(x)\, dx_2 = 0,$$

qui permet de retrouver l'expression du TMS_{12}.

Pour l'interprétation, notons qu'en posant $dx_1 = -1$, cette relation implique qu'il faut que $dx_2 = \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)} = TMS_{12}$ pour que le consommateur garde la même utilité. Il revient au même de dire que, du point de vue du consommateur, une unité du bien 1 vaut TMS_{12} unités du bien 2.

Exercice 2.2. Calculer le TMS_{12} pour la fonction d'utilité donnée dans l'exercice 2.1.

2.4. Comportement du consommateur.

Par hypothèse, le consommateur cherche à maximiser son utilité $U(x)$.

Comme pour l'entreprise, on admet les trois hypothèses suivantes. Avec la définition de son objectif, elles déterminent sans ambiguïté le comportement du consommateur dans une économie de marché.

Hypothèse 2.5. (d'information parfaite). Le consommateur a une information parfaite sur les prix p et sur ses préférences $U(x)$.

Hypothèse 2.6. (de rationalité parfaite). Il est capable de résoudre sans coût n'importe quel problème d'optimisation sous contrainte.

Hypothèse 2.7. (de concurrence parfaite). Il considère le vecteur de prix p comme une donnée et pense pouvoir vendre ou acheter aux prix p n'importe quelle quantité.

2.5. Equilibre du consommateur.

Soient p le vecteur des prix prévalant dans l'économie et R le revenu du consommateur (supposé donné). Un équilibre du consommateur est un plan de consommation x^0 qui maximise son utilité $U(x)$ dans l'ensemble des plans de consommation possibles physiquement ($x \in X$) et économiquement ($p \cdot x = \sum_{k=1}^{K} p_k x_k \leqslant R$) pour lui. Formellement, un équilibre du consommateur vérifie

$$x^0 \text{ maximise } U(x)\,, \text{ sous } x \in X \text{ et } p \cdot x \leqslant R.$$

2.5.1. Existence et unicité de l'équilibre.

L'existence d'un équilibre du consommateur est assuré du fait que l'ensemble des plans de consommation vérifiant $x \in X$ et $p \cdot x \leqslant R$ est fermé, borné et non vide si $R \geqslant 0$ (Hypothèse 2.1) et du fait que la fonction d'utilité U du consommateur est continue (Hypothèse 2.2).

L'unicité est garantie du fait que la fonction d'utilité U est strictement quasi-concave (Hypothèse 2.4).

2.5.2. Propriétés différentielles de l'équilibre.

Une première propriété découle de l'hypothèse 2.2, postulant que l'utilité est croissante. Par l'absurde, il est évident de montrer qu'elle implique qu'à l'équilibre, le consommateur sature toujours son budget. Formellement, si x^0 est un équilibre du consommateur pour les prix p et le revenu R, il vérifie $\sum_{i=1}^{K} p_i x_i^0 = R$.

En utilisant l'hypothèse 2.4 (de différentiabilité de U), d'autres propriétés pertinentes peuvent être dérivées.

Alors, si x^0 est un équilibre du consommateur et si x^0 est intérieur à l'ensemble de consommation X (il n'est pas sur la frontière), il existe un *multiplicateur de Lagrange* λ et une *fonction Lagrangienne*

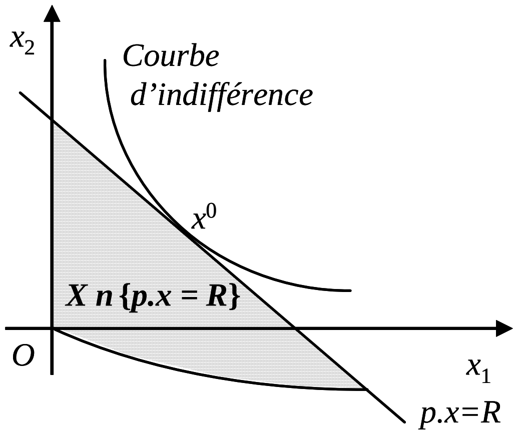
$$L(x) = U(x) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{K} p_i x_i - R \right).$$

telle que x^0 vérifie les conditions du premier ordre

$$L_i'\left(x^0\right) = U_i'\left(x^0\right) - \lambda p_i = 0,\ i = 1, 2, ..., K,$$

et la condition du second ordre

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} z_i U_{ij}''\left(x^0\right) z_j \leqslant 0, \text{ pour tout } \left(z_1, z_2, ..., z_K\right) \text{ tel que } \sum_{i=1}^{K} p_i z_i = 0.$$



Les conditions du premier ordre impliquent qu'à l'équilibre du consommateur, le taux marginal de substitution d'un bien par un autre est égal au rapport de prix de ces biens. Par exemple, pour les biens 1 et 2, on a

$$TMS_{12} = \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ce résultat se comprend de la manière suivante. Par définition, le $TMS_{12} = U'_1/U'_2$ est la valeur du bien 1 mesurée en unités de bien 2 pour le consommateur (son utilité est constante s'il obtient TMS_{12} unités supplémentaires du bien 2 pour compenser une unité en moins du bien 1). Le terme d'échange entre ces deux biens sur le marché est tel qu'une unité du bien 1 permet d'acheter p_1/p_2 unités du bien 2. Les conditions du premier ordre impliquent donc qu'à l'équilibre du consommateur, les valeurs interne et sur le marché des biens coïncident.

La condition du second ordre implique que la surface d'indifférence $U(x) = U\left(x^0\right)$ est localement au-dessus du plan de budget $p \cdot x = R$, ce qui garantit bien qu'on a un maximum d'utilité.

Remarque 2.2. (Ecriture des conditions d'optimalité sous forme matricielle). Sous forme matricielle, les conditions du premier ordre s'écrivent de manière plus courte

$$\text{Il existe } \lambda \text{ tel que } DU\left(x^0\right) = \lambda p,$$

en notant

$$DU(x) = \begin{bmatrix} U'_1(x) \\ \vdots \\ U'_K(x) \end{bmatrix}$$

le vecteur colonne des dérivées de U au point x. Autrement dit, la normale à l'ensemble $U(x) = 0$ et la normale au plan de budget $\sum_{k=1}^{K} p_i x_i = R$ sont colinéaires en x^0. La condition du second ordre s'écrit

$$z'\left(D^2U\left(x^0\right)\right)z\leqslant 0, \text{ pour tout } z \text{ tel que } (p)'\,z=0$$

en notant

$$D^2U\left(x\right)=\begin{bmatrix} U''_{11}\left(x\right) & \cdots & U''_{1K}\left(x\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U''_{K1}\left(x\right) & \cdots & U''_{KK}\left(x\right) \end{bmatrix}$$

la matrice hessienne de f au point y.

Exercice 2.3. Soit un consommateur, caractérisé par son ensemble de consommation $X=\left(R_+^*\right)^K$, sa fonction d'utilité $U\left(x\right)=\sum_{k=1}^K a_k \ln\left(x_k\right)$ (avec $a_k>0$, pour tout k, et $\sum_{k=1}^K a_k=1$) et son revenu R. Calculer $DU\left(x\right)$ et $D^2U\left(x\right)$. Donner les conditions du premier ordre et du second ordre vérifiées à l'équilibre du consommateur, noté x^0.

2.6. Fonctions de demande.

Sous les hypothèses 2.1 à 2.4, l'équilibre du consommateur x^0 existe et est unique, pour tout p et tout R. On peut donc définir, pour chaque bien k, une fonction de demande nette $d_k\left(p,R\right)$ du consommateur, associant à tout vecteur de prix p et à tout niveau de revenu R, la quantité x_k^0 prévue dans le plan de consommation d'équilibre x^0. On établit maintenant les propriétés des fonctions de demande nette.

On sait que l'équilibre x^0 du consommateur pour les prix p et le revenu R satisfait les conditions

$$U'_i\left(x^0\right)-\lambda p_i=0,\ i=1,2,...,K,$$
$$\sum_{i=1}^K p_i x_i^0=R.$$

Notons que, si on multiplie tous les prix et le revenu par une même constante positive, le problème du consommateur est en fait inchangé (il peut s'acheter les mêmes plans de consommation et sa fonction d'utilité n'est pas modifiée) et a donc même solution. On en déduit que l'équilibre du consommateur ne change pas non plus. On a donc la propriété suivante.

Propriété 2.1. (d'homogénéité des fonctions de demande). Les fonctions de demandes sont homogènes de degré 0 par rapport à p et R.

On interpréte parfois cela en disant que le consommateur n'est pas victime d'illusion monétaire.

Exercice 2.3. (Suite). Donner l'expression de la fonction de demande $d_k\left(p,R\right)$ du consommateur. Montrer qu'elle satisfait la propriété 2.1.

Pour obtenir d'autres propriétés moins immédiates des fonctions de demande nette, imaginons une modification infinitésimale du vecteur de prix dp et du revenu dR et cherchons les ajustements dx de l'équilibre initial x^0 nécessaires pour retrouver le nouvel équilibre du consommateur ; autrement dit, x^0+dx est l'équilibre du consommateur pour les prix $p+dp$ et le revenu $R+dR$, et vérifie les conditions précédentes.

Différentions le système précédent pour obtenir

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^K U''_{ij}\left(x^0\right)dx_j - d\lambda\left(p_i = \frac{U'_i\left(x^0\right)}{\lambda}\right) - \lambda dp_i = 0,\ i=1,2,...,K, \\ \sum_{i=1}^K dp_i x_i^0 + \sum_{i=1}^K\left(p_i = \frac{U'_i\left(x^0\right)}{\lambda}\right)dx_i = dR. \end{array}$$

Sous forme matricielle, ceci s'écrit

$$\frac{1}{\lambda}\left[\begin{array}{cccc} U''_{11}\left(x^0\right) & \cdots & U''_{1K}\left(x^0\right) & -U'_1\left(x^0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U''_{K1}\left(x^0\right) & \cdots & U''_{KK}\left(x^0\right) & -U'_K\left(x^0\right) \\ -U'_1\left(x^0\right) & \cdots & -U'_K\left(x^0\right) & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dx_1 \\ \vdots \\ dx_K \\ d\lambda/\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x_1^0 & \cdots & x_K^0 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dp_1 \\ \vdots \\ dp_K \\ dR \end{array}\right]$$

soit encore

$$\frac{1}{\lambda}\left[\begin{array}{cc} D^2U\left(x^0\right) & -DU\left(x^0\right) \\ \left(-DU\left(x^0\right)\right)' & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dx \\ d\lambda/\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \left(x^0\right)' & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dp \\ dR \end{array}\right]$$

La solution en dx de ce système linéaire détermine les propriétés des fonctions de demande. Elle existe et est unique si et seulement si la matrice

$$\frac{1}{\lambda}\left[\begin{array}{cc} D^2U\left(x^0\right) & -DU\left(x^0\right) \\ \left(-DU\left(x^0\right)\right)' & 0 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A & -B \\ (-B)' & C \end{array}\right]$$

existe (en posant $A(K,K)$, $B(K,1)$ et $C(1,1)$). On a alors

$$\left[\begin{array}{c} dx \\ d\lambda/\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A - B\left(x^0\right)' & B \\ (-B)' + C\left(x^0\right)' & -C \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dp \\ dR \end{array}\right]$$

et on écrit

$$dx = Adp + B\left(dR - \left(x^0\right)'dp\right).$$

Cette relation s'écrit aussi sous la forme plus explicite

$$dx_i = \sum_{j=1}^K a_{ij}dp_j + b_i\left(dR - \sum_{j=1}^K x_j^0 dp_j\right),\ i=1,2,...,K.$$

Cette équation décompose la variation de x en deux parties, que nous dissocions dans les paragraphes suivants.

2.6.1. Effet de revenu.

Entre l'état initial et l'état final :

- le revenu a varié de dR ;
- le coût du panier de biens x^0 a varié de $\left(x^0\right)' dp = \sum_{j=1}^{K} x_j^0 dp_j$.

On appelle *variation compensatrice du revenu* la différence $dR^C = dR - \left(x^0\right)' dp$. C'est une mesure de la variation du pouvoir d'achat du consommateur entre les deux états intial et final. Elle est positive si le consommateur bénéficie d'une augmentation de son pouvoir d'achat, négative sinon.

On appelle *effet de revenu* la variation dx du plan d'équilibre du consommateur résultant de la variation du pourvoir d'achat de son revenu seulement. On le détermine en posant $dp = 0$ dans l'expression précédente. L'effet de revenu est donc égal à $dx = BdR^C = B\left(dR - \left(x^0\right)' dp\right)$.

On montre que si la variation compensatrice du revenu est nulle, l'utilité du consommateur reste constante.

Ceci découle directement des conditions du premier ordre. En effet, à l'équilibre, le budget du consommateur est toujours saturé. On a donc toujours $R = \sum_{j=1}^{K} p_j x_j^0$. Il s'ensuit que $dR = \sum_{i=1}^{K} x_i^0 dp_i + \sum_{i=1}^{K} p_i dx_i$. Donc si $dR = \sum_{i=1}^{K} x_i^0 dp_i$, on a $\sum_{i=1}^{K} p_i dx_i = 0$. Or à l'équilibre, $U_i'\left(x^0\right) = \lambda p_i$. En substituant, on trouve finalement $\sum_{i=1}^{K} U_i'\left(x^0\right) dx_i = 0$. Autrement dit, l'utilité est constante.

2.6.2 Effet de substitution.

On appelle *effet de substitution* la variation dx du plan d'équilibre du consommateur résultant de la variation des prix seulement, soit à pouvoir d'achat du revenu constant. Le pouvoir d'achat est constant si la variation compensatrice du revenu est nulle ou, ce qui revient au même, si l'utilité du consommateur est maintenue constante. Donc, l'effet de substitution s'obtient en posant $dR^C = dR - \left(x^0\right)' dp = 0$ dans l'expression précédente. L'effet de substitution est finalement donnée par $dx = Adp$. C'est le produit de la matrice A, dite *matrice des coefficients de substitution de Slutsky*, par la variation des prix dp.

On parle d'effet de substitution car quand $dR^C = 0$, le plan de consommation initial reste accessible au budget du consommateur (par définition) et, par conséquent, toute modification du plan de consommation s'explique entièrement par la variation des prix relatifs.

On peut montrer que la matrice des coefficients de substitution de Slutsky est symétrique et semi-definie négative. Il sensuit les deux propriétés suivantes.

Propriété 2.2. (de symétrie des effets de substitution). Lorsque la variation du revenu est compensée, les effets de substitution sont symétriques.

En effet, si $dR^C = 0$, on a

$$\frac{dx_i}{dp_j} = a_{ij} = a_{ji} = \frac{dx_j}{dp_i}, \text{ pour tout } i \text{ et } j,$$

car la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique.

Cette propriété permet de définir sans ambiguïté les notions de substituabilité et de complémentarité pour le consommateur. Deux biens sont substituts si $a_{ij} = a_{ji} > 0$ (l'augmentation du prix du bien j suscite une hausse de la demande du bien i) et compléments si $a_{ij} = a_{ji} < 0$ (l'augmentation du prix du bien j suscite une baisse de la demande du bien i).

Propriété 2.3. (de décroissance de la fonction de demande). La demande d'un bien est non croissante avec une variation positive compensée de son prix.

En effet, si $dR^C = 0$, on a

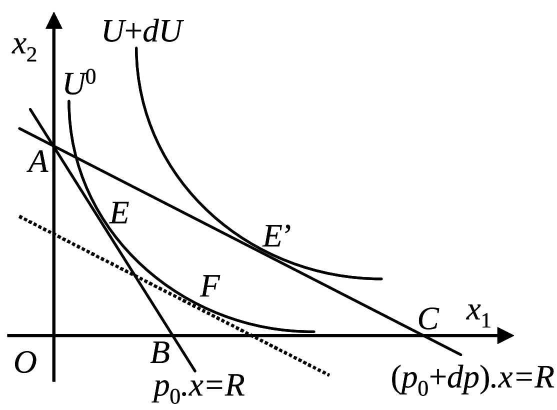
$$\frac{dx_i}{dp_i} = a_{ii} \leqslant 0, \text{ pour tout } i,$$

car la matrice $A = (a_{ij})$ est semi-définie négative (tous les termes de la diagonale sont négatifs ou nuls).

Exercice 2.3. (Suite). Supposons que $p_k = a_k$, pour tout k, et $R = 1$. Alors, le plan de consommation d'équilibre x^0 du consommateur est $x_k^0 = 1$ pour chaque bien k (vérifier-le). Déterminer la matrice des coefficients de substitution de Slutsky associée à ce cas (Inverser la matrice hessienne bordée, obtenue à la section 2.6, après différentiation des conditions vérifiées par l'équilibre du consommateur). En déduire dx_i/dp_j, pour $i = j$ et $i \neq j$. Retrouver ces résultats à partir des fonctions de demande $d_k(p, R)$.

2.6.3 Représentation graphique

Dans le cas où il y a deux biens, une représentation graphique des définitions et des résultats précédents est possible.



Dans l'état initial, les prix et le revenu du consommateur détermine la droite de budget AB. Le plan de consommation d'équilibre du consommateur est alors au point E.

On considère une modification de l'état initial telle que $dp_1 < 0$, $dp_2 = 0$ et $dR = 0$.

Ce nouvel état définit la droite de budget AC du consommateur. Le plan de consommation d'équilibre du consommateur se déplace au point E'.

Comme vu ci-dessus, on peut décomposer le passage de E à E' en distinguant les effets de revenu et de substitution.

L'effet de substitution correspond au passage de E à F.

Le point F serait l'équilibre du consommateur si sa droite de budget était la droite en pointillés sur la figure. Cette droite de budget "intermédiaire" est construite parallèle à AC (même rapport de prix) et telle qu'à l'équilibre "intermédiaire" F, le consommateur ait la même utilité qu'en E (on se déplace le long de la courbe d'indifférence initiale). Comme vue ci-dessus, cette propriété est caractéristique d'une variation du revenu compensant la variation des prix ($dR^C = 0$).

Par définition, on appelle effet de substitution le passage des points E à F ainsi construits. On vérifie bien que, suite à la baisse du prix du bien 1, le consommateur, la variation du revenu étant compensée, augmente sa consommation du bien 1 et diminue celle du bien 2.

L'effet de revenu correspond au passage de F à E'.

Entre les courbes de budget AB et AC, le consommateur bénéficie d'une hausse de pouvoir d'achat, "mesurable" par la distance séparant la droite de budget compensée (en pointillé) et AC.

Par définition, on appelle effet de revenu le passage de F à E'. On voit que le consommateur répercute sa hausse de pouvoir d'achat sur les deux biens.

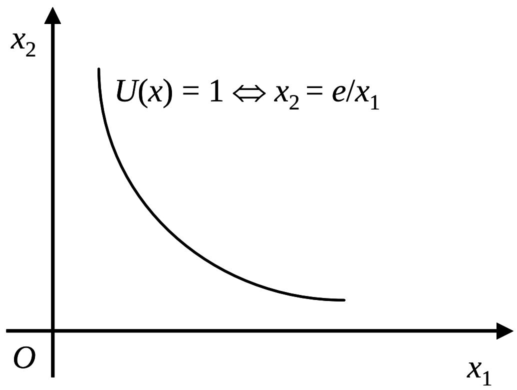
Remarque 2.4. Il est tout à fait possible que, du fait de l'effet de revenu, la baisse du prix du bien 1 se traduise au total par une diminution de la demande du bien 1 et une augmentation de la demande du bien 2.

2.7. Corrigé des exercices.

Exercice 2.1. Représenter la courbe d'indifférence $U(x) = 1$ quand le consommateur est caractérisé par l'ensemble de consommation $X = \left(R_+^*\right)^2$ et la fonction d'utilité $U(x) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ définie sur X.

On doit représenter les points (x_1, x_2) tels que $\ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 x_2) =$

$\ln(e) = 1 \Leftrightarrow x_2 = e/x_1$.



Exercice 2.2. Calculer le TMS_{12} pour la fonction d'utilité donnée dans l'exercice 2.1.

On a, par définition :

$$TMS_{12} = \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)} = \frac{1/x_1}{1/x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

On peut aussi l'obtenir en calculant la pente de la courbe d'indifférence $U(x) = k$ dans le plan (O, x_1, x_2). Elle a pour expression $\ln(x_1 x_2) = k \Leftrightarrow x_2 = e^k/x_1$. On a donc $dx_2/dx_1 = -e^k/(x_1)^2$. En substituant $e^k = x_1 x_2$, on obtient $dx_2/dx_1 = -x_1x_2/(x_1)^2 = -x_2/x_1$. Le TMS_{12} est la valeur absolue de cette pente.

Exercice 2.3. Soit un consommateur, caractérisé par son ensemble de consommations $X = (R_+^*)^K$, sa fonction d'utilité $U(x) = \sum_{k=1}^K a_k \ln(x_k)$ (avec $a_k > 0$, pour tout k, et $\sum_{k=1}^K a_k = 1$) et son revenu R. Calculer $DU(x)$ et $D^2U(x)$. Donner les conditions du premier ordre et du second ordre vérifiées à l'équilibre du consommateur, noté x^0.

On a

$$DU(x) = \begin{bmatrix} a_1/x_1 \\ \vdots \\ a_K/x_K \end{bmatrix} \qquad D^2U(x) = \begin{bmatrix} -a_1/(x_1)^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -a_K/(x_K)^2 \end{bmatrix}$$

On définit ci-dessous les trois matrices colonnes

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix}, \; x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_K^0 \end{bmatrix} \text{ et } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{bmatrix}.$$

Leurs transposées sont notées respectivement $(p)'$, $(x^0)'$ et $(z)'$.

L'équilibre du consommateur x^0 vérifie les conditions :
(1) le consommateur sature son budget : $(p)' x^0 = R$ (soit $\sum_{k=1}^{K} p_k x_k^0 = R$) ;
(2) il existe un multiplicateur de Langrange λ tel que : $DU\left(x^0\right) = \lambda p$ (soit $a_k / x_k^0 = \lambda p_k$, pour tout k) ;
(3) l'utilité est non croissante en se déplaçant localement sur la surface de budget : $\forall z \in R^K, (p)' z = 0 \Longrightarrow (z)' \left(D^2 U\left(x^0\right)\right) z \leqslant 0$.

Comme $\forall z \in R^K$, $(z)' \left(D^2 U\left(x^0\right)\right) z = -\sum_{k=1}^{K} a_k \left(z_k / x_k^0\right)^2 < 0$, la dernière condition est toujours satisfaite (la fonction d'utilité est concave).

Exercice 2.3. (Suite). Donner l'expression de la fonction de demande $d_k(p, R)$ du consommateur. Montrer qu'elle satisfait la propriété 2.1.

La condition (2) implique $\forall k$, $a_k = \lambda p_k x_k^0$. Donc $\sum_{k=1}^{K} a_k = \lambda \sum_{k=1}^{K} p_k x_k^0$. Sachant que $\sum_{k=1}^{K} a_k = 1$ et la condition (1), on en déduit $\lambda R = 1$. Donc $\lambda = 1/R$. En substituant dans les conditions du premier ordre (2), on trouve finalement $x_k^0 = d_k(p, R) = a_k R / p_k$, pour tout k. On vérifie immédiatement la propriété 2.1 : $\forall t > 0$, on a $d_k(tp, tR) = a_k(tR) / (tp_k) = a_k R / p_k = d_k(p, R)$, pour tout k.

Exercice 2.3. (Suite). Supposons que $p_k = a_k$, pour tout k, et $R = 1$. Alors, le plan de consommation d'équilibre x^0 du consommateur est $x_k^0 = 1$ pour chaque bien k (vérifier-le). Déterminer la matrice des coefficients de substitution de Slutsky associée à ce cas (Inverser la matrice hessienne bordée, obtenue à la section 2.6, après différentiation des conditions vérifiées par l'équilibre du consommateur). En déduire dx_i / dp_j, pour $i = j$ et $i \neq j$. Retrouver ces résultats à partir des fonctions de demande $d_k(p, R)$.

On vérifie immédiatement que $x_k^0 = d_k(a_1, ..., a_K, 1) = 1$, pour tout k.
On doit calculer la matrice :

$$\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} D^2 U\left(x^0\right) & -DU\left(x^0\right) \\ \left(-DU\left(x^0\right)\right)' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & -B \\ (-B)' & C \end{bmatrix}$$

La matrice des coefficients de substitution de Slutsky est donnée par le sous-bloc A.
Quand $p_k = a_k$, pour tout k, et $R = 1$, on a

$$\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} D^2 U\left(x^0\right) & -DU\left(x^0\right) \\ \left(-DU\left(x^0\right)\right)' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & -a_K & -a_K \\ -a_1 & & -a_K & 0 \end{bmatrix}$$

On peut inverser cette matrice en utilisant la méthode de Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -a_1 & 0 & -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_K & -a_K & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_K & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & 0 & a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_K & a_K & 0 & -1 & 0 \\ -a_1 & -a_K & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & 0 & a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_K & a_K & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{1}_{=\Sigma a_K} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1/a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/a_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-1/a_1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1-1/a_K & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice de Slutsky est donc

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a_1-1}{a_1} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \frac{a_K-1}{a_K} \end{bmatrix}$$

et on a

$$\frac{dx_i}{dp_i} = \frac{a_i - 1}{a_i} < 0 \text{ et } \frac{dx_i}{dp_j} = 1 > 0.$$

On vérifie les propriétés 2.2 et 2.3. De plus, tous les biens sont substituts.

Pour retrouver ces résultats avec les $d_k(p,R)$, on doit considérer des variations compensées du revenu : $dR = \sum_{k=1}^{K} x_k^0 dp_k = \sum_{k=1}^{K} dp_k$ (car $x_k^0 = 1$, pour tout k). On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_i} d_i(p,R) &= -\frac{a_i R}{(p_i)^2} \\
\frac{\partial}{\partial p_j} d_i(p,R) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial R} d_i(p,R) &= -\frac{a_i}{p_i}
\end{aligned}$$

Donc, $\forall dp_k$, $k = 1, ..., K$, et $\forall dR$, on a

$$dx_k^0 = -\frac{a_k R}{(p_k)^2} dp_k + \frac{a_k}{p_k} dR$$

Sachant que $x_k^0 = a_k R / p_k$, ceci s'écrit aussi

$$dx_k^0 = -\frac{x_k^0}{p_k} dp_k + \frac{x_k^0}{R} dR = x_k^0 \left(-\frac{dp_k}{p_k} + \frac{dR}{R} \right)$$

Pour une variation compensée du revenu $dR = \sum_{k=1}^{K} x_k^0 dp_k$:

$$dx_k^0 = x_k^0 \left(-\frac{dp_k}{p_k} + \frac{\sum_{k=1}^{K} x_k^0 dp_k}{R} \right)$$

Pour $k = i$ et si seul le prix du bien i varie ($dp_k = 0$, pour tout $k \neq i$), on obtient

$$dx_i^0 = x_i^0 \left(-\frac{dp_i}{p_i} + \frac{x_i^0 dp_i}{R} \right) = x_i^0 \frac{dp_i}{p_i} \left(-1 + \frac{p_i x_i^0}{R} \right)$$

Or $x_i^0 = d_i(p,R) = \frac{a_i R}{p_i} \Longrightarrow \frac{p_i x_i^0}{R} = a_i$. Soit $dx_i^0 = x_i^0 \frac{dp_i}{p_i}(-1 + a_i)$. Si on pose $p_i = a_i$, $x_i^0 = 1$, on vérifie

$$dx_i^0 = \frac{a_i - 1}{a_i} dp_i$$

Pour $k = i$ et si seul le prix du bien $j \neq i$ varie ($dp_k = 0$, pour tout $k \neq j$), on obtient

$$dx_i^0 = x_i^0 \frac{x_j^0 dp_j}{R} = x_i^0 \frac{dp_j}{p_j} \frac{p_j x_j^0}{R} = x_i^0 \frac{dp_j}{p_j} a_j$$

Si on pose $p_j = a_j$, $x_i^0 = x_j^0 = 1$, on vérifie

$$dx_j^0 = dp_j$$