Chapitre 1. Le producteur.

1.1. Définition des biens.

On s'intéresse à la production de biens par un producteur donné.
La définition d'un bien n'est pas restrictive et tient compte, si nécessaire :
- du temps : à quel moment le bien sera-t-il livré ? ;
- de l'espace : où sera-t-il livré ? ;
- de l'état du monde : dans quelles circonstances sera-t-il livré ?

La production du producteur se mesure en flux de biens, i.e. en quantités par unité de temps. Par convention, les inputs sont comptés négativement et les outputs sont comptés positivement.

1.2. Représentation de la technologie.

On suppose qu'il y a K biens.

On appelle *plan de production* du producteur la donnée de sa production nette de chaque bien k, différence entre les outputs créés et les inputs détruits. Formellement, c'est un point y dans l'espace des biens R^K.

Remarque 1.1. La production nette d'un bien donné peut être négative.

On appelle *ensemble de production* du producteur l'ensemble des plans de production réalisables pour lui, étant donnée sa technologie. C'est un sous-ensemble Y de l'espace des biens R^K.

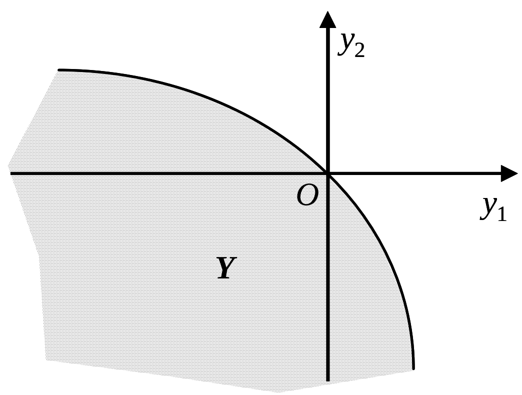


Figure 1.1 - Exemple d'ensemble de production avec 2 biens

Un plan de production y^0 est dit *techniquement efficace* s'il n'est pas possible de trouver dans l'ensemble de production Y un autre plan de production permettant d'obtenir une plus forte production nette d'un bien, sans que cela exige de production nette moins élevée d'un autre bien. Graphiquement, un tel plan de production appartient à la frontière Nord-Est de l'ensemble Y.

Une autre façon (équivalente sous certaines conditions) de représenter la technologie du producteur consiste à utiliser la notion de fonction de production.

Une fonction de production f pour le producteur considéré est une fonction définie sur l'espace des biens R^K telle que

$$f(y_1, y_2, ..., y_K) = 0,$$

si et seulement si le plan de production y est techniquement efficace, et telle que

$$f(y_1, y_2, ..., y_K) \leqslant 0,$$

si et seulement si le plan de production y appartient à Y.

Cette définition correspond à la forme la plus générale d'une fonction de production. Elle est compatible avec le fait que le producteur puisse produire plusieurs outputs.

Souvent, on s'en tient à une expression un peu plus particulière de la fonction de production. Elle nécessite de supposer que le producteur ne produit qu'un output, par exemple le bien K, à partir des autres biens utilisés comme inputs. La fonction de production prend alors la forme

$$f(y_1, y_2, ..., y_K) = y_K - g(y_1, ..., y_{K-1}).$$

La contrainte technique s'écrit

$$y_K \leqslant g(y_1, ..., y_{K-1})$$

et un plan de production efficace s'écrit simplement

$$y_K = g(y_1, ..., y_{K-1}).$$

Remarque 1.2. Pour mieux distinguer inputs et outputs, on pourra noter ci-dessous $z = (z_1, z_2, ..., z_{K-1})$ un vecteur de l'espace des inputs R^{K-1} et $y_K = g(z)$ la production du bien K associée.

A partir de cette notion, on peut définir sans ambiguïté une *isoquante* comme tous les vecteurs z de l'espace des inputs R^{K-1} qui permettent de produire la quantité d'output $y_K = q$ exactement.

Exercice 1.1. Représentation des technologies.

a) Représenter graphiquement l'intersection de l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2, y_3) \in IR^3; f(y_1, y_2, y_3) \leq 0\}$ avec le plan isoquante $y_3 = q > 0$ pour la technologie Leontief : $f(y_1, y_2, y_3) = \max\{ay_1, by_2\} + y_3$, $a, b > 0$.

b) Faire la représentation graphique d'une isoquante $y_3 = q$ pour la technologie Cobb-Douglas : $y_3 = g(z_1, z_2) = z_1^a z_2^{1-a}$, $0 < a < 1$ (avec $(z_1, z_2) \in R_+^2$). On prendra $a = 1/2$.

1.3. Propriétés des technologies.

On recense ici les propriétés des technologies retenues par la suite et on les interprète.

Hypothèse 1.1. (d'additivité). Si les deux vecteurs y^1 et y^2 définissent des productions possibles ($y^1 \in Y$ et $y^2 \in Y$ ou $f\left(y^1\right) \leqslant 0$ et $f\left(y^2\right) \leqslant 0$), alors le vecteur $y = y^1 + y^2$ définit aussi une production possible ($y \in Y$ ou $f(y) \leqslant 0$).

Cette hypothèse est naturelle. On peut réaliser y en réalisant indépendamment y^1 et y^2.

Hypothèse 1.2. (de divisibilité). Si le vecteur y^1 définit une production possible ($y^1 \in Y$ ou $f\left(y^1\right) \leqslant 0$) et si t est un nombre compris entre 0 et 1, alors le vecteur ty^1 définit une production possible ($ty^1 \in Y$ ou $f\left(ty^1\right) \leqslant 0$).

Cette hypothèse revient à admettre que l'on peut fractionner toute opération de production et la réaliser à une échelle réduite, sans modifier les proportions d'inputs et d'outputs. Cette hypothèse n'est pas toujours vraie en réalité, en particulier dans les secteurs d'activité nécessitant des infrastructures lourdes.

Hypothèse 1.3. (de rendements d'échelle constants). Si le vecteur y^1 définit une production possible ($y^1 \in Y$ ou $f\left(y^1\right) \leqslant 0$) et si t est un nombre positif, alors le vecteur ty^1 définit une production possible ($ty^1 \in Y$ ou $f\left(ty^1\right) \leqslant 0$).

Cette hypothèse est plus forte que la divisibilité. Elle transpose à une échelle élargie ce que l'hypothèse de divisibilité impliquait à une échelle réduite. Les rendements d'échelle constants sont en fait une conséquence des hypothèses d'additivité et de divisibilité (à montrer comme exercice).

Hypothèse 1.4. (de convexité). Si les deux vecteurs y^1 et y^2 définissent des productions possibles ($y^1 \in Y$ et $y^2 \in Y$ ou $f\left(y^1\right) \leqslant 0$ et $f\left(y^2\right) \leqslant 0$) et si t est un nombre compris entre 0 et 1, alors le vecteur $ty^1 + (1-t)\, y^2$ définit une production possible ($ty^1 + (1-t)\, y^2 \in Y$ ou $f\left(ty^1 + (1-t)\, y^2\right) \leqslant 0$).

Cette propriété implique que l'ensemble de production est convexe (il contient tous les segments joignant ses points). Autrement dit, les points au-dessus d'une isoquante quelconque forment un ensemble convexe.

1.4. Propriétés des fonctions de production.

Les hypothèses suivantes sont en fait les conséquences des hypothèses précédentes, vues sous l'angle des fonctions de production.

Hypothèse 1.3. (de rendements d'échelle constants). g est homogène de degré 1 ($\forall t > 0$, $\forall z \in R^{K-1}$, $g(tz) = tg(z)$).

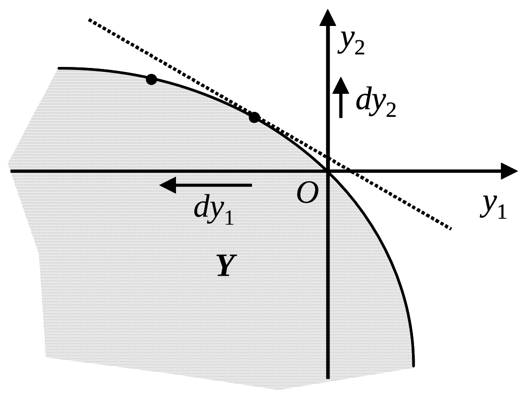
Hypothèse 1.4. (de convexité). f est quasi-convexe ($\forall t \in [0,1]$, $f\left(ty^1 + (1-t)\, y^2\right) \leqslant \min\left\{f\left(y^1\right), f\left(y^2\right)\right\}$).

Exercice 1.2. Montrer ces conséquences des hypothèses 1.3 et 1.4.

1.5. Substitutions entre inputs.

On parle de *susbtitution* lorsqu'on passe d'un plan de production efficace à un autre, tel que les quantités produites de deux biens varient sans modifier les quantités produites des autres biens.

Graphiquement, la substitution entre, par exemple, les biens 1 et 2 se traduit par un déplacement le long de la frontière de l'ensemble Y dans le plan (O, y_1, y_2).



On appelle *taux marginal de substitution du bien 1 par le bien 2*, noté TMS_{12}, le ratio

$$TMS_{12} = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_1'(y)}{f_2'(y)}.$$

Graphiquement, c'est la pente, en valeur absolue, de la frontière de l'ensemble Y au point y dans le plan (O, y_1, y_2). C'est donc la valeur du quotient dy_2/dy_1, quand $dy_1 \to 0$ et quand dy_2 est choisi pour retrouver un plan de production efficace (sur la frontière de Y).

Formellement, on peut le retrouver par le calcul différentiel.

Soient y et $y + dy$ deux plans de production efficaces. Ils vérifient donc

$$f(y) = f(y + dy) = 0.$$

Si la fonction de production est différentiable, on a (par définition)

$$f(y + dy) = f(y) + \textstyle\sum_{k=1}^{K} f_k'(y)\, dy_k + o(dy).$$

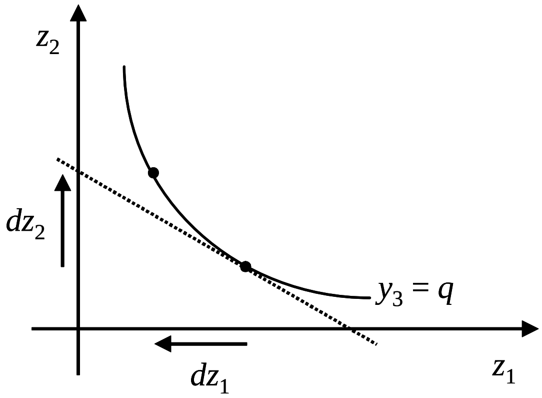
En posant $dy_k = 0$, sauf pour les biens 1 et 2, et sachant que dy_1 et dy_2 sont choisis arbitrairement petits et tels que $f(y + dy) = f(y) = 0$, on obtient la relation

$$f_1'(y)\, dy_1 + f_2'(y)\, dy_2 = 0,$$

à partir de laquelle on retrouve la définition.

On note que si on pose $dy_1 = -1$, on a $dy_2 = \frac{f_1'(y)}{f_2'(y)} = TMS_{12}$. Par conséquent, ce ratio détermine le nombre d'unités du bien 2 que l'on peut produire en plus si on réduit la production du bien 1 d'une unité. En d'autres termes, c'est le coût marginal du bien 1, mesuré en unités de bien 2.

Remarque 1.3. Si le producteur produit un unique output y_3 à partir des inputs z_1 et z_2 selon la fonction de production $y_3 = g(z_1, z_2)$, la subsitution entre les biens 1 et 2 se traduit par un déplacement le long d'une isoquante.



Le taux marginal de substitution du bien 1 par le bien 2 est la pente de l'isoquante au point considéré et est alors donné par

$$TMS_{12} = -\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{g_1'(z)}{g_2'(z)}.$$

Exercice 1.3. Calculer le TMS_{12} pour la technologie Cobb-Douglas donnée à l'exercice 1.1.

Remarque 1.4. Pour déterminer rigoureusement le taux marginal de substitution (et justifier au passage la méthode utilisant la différentielle de f vues ci-dessus), on utilise le *théorème des fonctions implicites* : Si $f(x_1, x_2)$ est continûment différentiable au voisinage du point $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, si $f\left(x_1^0, x_2^0\right) - y = 0$ et si $f_2'\left(x_1^0, x_2^0\right) \neq 0$, alors l'équation $f(x_1, x_2) - y = 0$ admet une solution unique en x_2 pour tout x_1 au voisinage de x_1^0. Ceci définit implicitement x_2 comme une fonction de x_1. On montre que cette fonction est dérivable, de dérivée $-f_1'\left(x_1^0, x_2^0\right) / f_2'\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

1.6. Comportement de l'entreprise.

On s'intéresse au comportement d'un producteur dans une économie de marché. On parle alors d'entreprise ou de firme. On note p_k le prix prévalant sur le marché du bien k ($k = 1, ..., K$).

On admet qu'une entreprise se fixe comme objectif de maximiser son profit

$$\pi = p \cdot y = \sum_{k=1}^{K} p_k y_k.$$

Remarque 1.5. On se souvient que si $y_k < 0$, le bien k est un input ; si $y_k > 0$, c'est un output. L'expression ci-dessus mesure le profit, en faisant la différence entre les recettes et les dépenses.

La définition de l'objectif de l'entreprise ne suffit pas à caractériser complètement son comportement. Pour cela, on doit poser d'autres hypothèses, délimitant sa capacité à atteindre son objectif et à interagir avec son environnement. On pose donc les hypothèses suivantes.

Hypothèse 1.5. (d'information parfaite). L'entreprise a une information parfaite sur les prix p et sur sa technologie Y.

Hypothèse 1.6. (de rationalité parfaite). Elle sait résoudre sans coût n'importe quel problème d'optimisation.

Hypothèse 1.7. (de concurrence parfaite). L'entreprise considère le vecteur de prix p comme une donnée et pense pouvoir vendre ou acheter aux prix p n'importe quelle quantité.

Ces hypothèses, certes irréalistes, simplifient grandement l'étude du comportement de l'entreprise. Elles impliquent que l'entreprise est parfaitement capable d'atteindre son objectif et que ses décisions ne modifient pas son environnement.

Remarque 1.6. L'hypothèse de concurrence imparfaite (selon laquelle l'entreprise a conscience d'influencer le vecteur de prix p par ses propres décisions) sera traitée dans les chapitres 5 et 6.

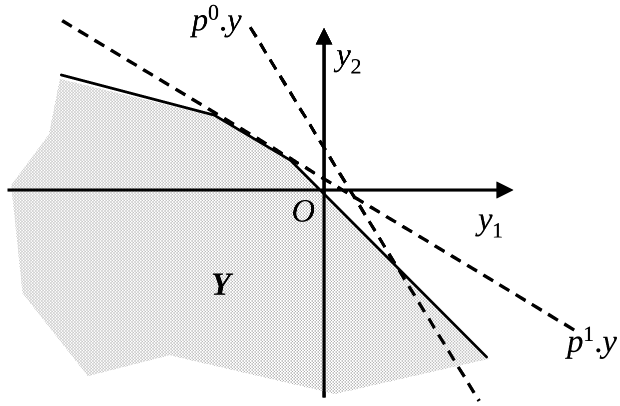
1.7. Equilibre de l'entreprise.

Du fait des hypothèses précédentes, on appelle *équilibre de l'entreprise* un plan de production qui maximise son profit dans l'ensemble des plans de production possibles pour elle. Formellement, y^0 est un équilibre de l'entreprise si, et seulement si, y^0 maximise $p \cdot y$ dans l'ensemble Y.

1.7.1 Existence et unicité de l'équilibre

L'existence de l'équilibre de l'entreprise n'est pas garantie sous les hypothèses 1.1 à 1.4. Ainsi, avec une technologie à rendements d'échelle constants, s'il existe $y^0 \in Y$ tel que $p \cdot y^0 > 0$, pour tout t, $\left(ty^0\right) \in Y$ et $p \cdot \left(ty^0\right)$ augmente avec t. Autrement dit, le problème n'a pas de solution car, en augmentant l'échelle de production, on augmente le profit. De même, l'unicité de la solution n'est pas assurée sous les mêmes hypothèses. Avec une technologie est à rendements d'échelle constants, si $y^0 \in Y$ est tel que $p \cdot y^0 = 0$ maximise le profit de l'entreprise, alors, pour tout $t > 0$, $ty^0 \in Y$ et $p \cdot \left(ty^0\right) = 0$ maximise aussi le profit.

La figure ci-dessous illustre le problème d'existence et d'unicité pour une technologie donnée. Pour les prix p^0, le profit augmente indéfiniment si on se déplace le long de la frontière de l'ensemble Y vers la droite. Pour les prix p^1, le profit est maximum pour tous les points d'intersection entre la droite d'iso-profit en pointillés et la frontière de l'ensemble Y.



Ces mises en garde faites, on admet par la suite que les conditions sont réunies pour que l'équilibre de l'entreprise existe et soit unique.

1.7.2 Propriétés différentielles de l'équilibre

Supposons que la technologie de l'entreprise soit représentée par la fonction de production $f(y)$. L'équilibre de l'entreprise est alors la solution du problème de maximisation

$$\max\ p \cdot y, \text{ sous } f(y) = 0.$$

Remarque 1.7. On suppose ici qu'au moins un prix est positif et que tous les prix sont positifs ou nuls. En ce cas, l'entreprise ne perd rien à choisir un plan de production efficace et on peut poser d'emblée $f(y) = 0$.

Si on suppose que $f(y)$ est dérivable jusqu'à l'ordre deux, on peut utiliser le *théorème du Lagrangien.*

Alors, si y^0 est solution du problème de maximisation du profit, il existe un *multiplicateur de Lagrange* λ et une *fonction Lagrangienne*

$$L(y) = \sum_{i=1}^{K} p_i y_i - \lambda f(y_1, y_2, ..., y_K)$$

telle que y^0 vérifie les conditions du premier ordre

$$L_i'(y_0) = p_i - \lambda f_i'\left(y^0\right) = 0,\ i = 1, 2, ..., K,$$

et la condition du second ordre

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} z_i f_{ij}''\left(y^0\right) z_j \geqslant 0, \text{ pour tout } \left(z_1, z_2, ..., z_K\right) \text{ tel que } \sum_{i=1}^{K} f_i'\left(y^0\right) z_i = 0.$$

Remarque 1.8. En supposant pour la suite que les dérivées d'ordre 1 de $f\left(y\right)$ ne s'annulent jamais simultanément, le multiplicateur de Lagrange est positif.

Les conditions du premier ordre impliquent qu'à l'équilibre de l'entreprise, le taux marginal de substitution d'un bien par un autre est égal au rapport des prix de ces biens. Par exemple, pour les biens 1 et 2, on a

$$TMS_{12} = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ce résultat se comprend de la manière suivante. Par définition, le $TMS_{12} = f_1'/f_2'$ est le nombre d'unités du bien 2 que l'on peut produire si l'on renonce à la production d'une unité du bien 1. Le terme d'échange entre ces deux biens sur le marché est tel que l'on se procure p_1/p_2 unités du bien 2 contre une unité du bien 1. Les conditions du premier ordre impliquent donc qu'à l'équilibre de l'entreprise, les valeurs interne et sur le marché des biens coïncident.

La condition du second ordre implique que la surface $f\left(y\right) = 0$ est localement sous le plan $p \cdot y$, ce qui garantit bien qu'on a un maximum de profit.

Remarque 1.9. (Ecriture des conditions d'optimalité sous forme matricielle). Sous forme matricielle, les conditions du premier ordre s'écrivent de manière plus courte

$$\lambda Df\left(y^0\right) = p,$$

en notant

$$Df\left(y\right) = \begin{bmatrix} f_1'\left(y\right) \\ \vdots \\ f_K'\left(y\right) \end{bmatrix}$$

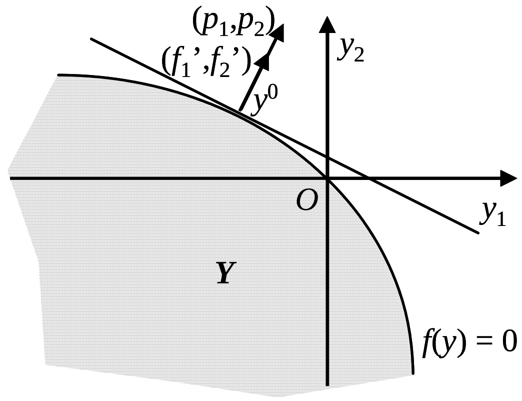
le vecteur colonne des dérivées de f au point y. Autrement dit, le vecteur normal à l'ensemble $f\left(y\right) = 0$ et le vecteur normal au plan d'isoprofit $p \cdot y$ sont colinéaires en y^0. La condition du second s'écrit quant à elle

$$z'\left(D^2 f\left(y^0\right)\right) z \geqslant 0, \text{ pour tout } z \text{ tel que } \left(Df\left(y^0\right)\right)' z = 0$$

en notant

$$D^2 f\left(y\right) = \begin{bmatrix} f_{11}''\left(y\right) & \cdots & f_{1K}''\left(y\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{K1}''\left(y\right) & \cdots & f_{KK}''\left(y\right) \end{bmatrix}$$

la matrice hessienne de f au point y.



1.8. Fonctions d'offre.

Sous certaines conditions (si on suppose que la fonction de production f est strictement quasi-convexe), le problème

$$\max \ p \cdot y, \text{ sous } f(y) = 0,$$

admet une solution unique, déterminant l'offre nette de chaque bien k par l'entreprise aux prix p donnés (si l'offre nette d'un bien est négative, elle s'interprète comme une demande d'inputs). En répétant l'opération pour tous les prix p, on construit une fonction d'offre nette de l'entreprise pour chaque bien k, fonction des prix p, notée $s_k(p)$.On étudie ci-dessous les propriétés de ces fonctions d'offre nette.

Remarque 1.10. S'il y a multiplicité de l'équilibre, on définit une correspondance d'offre nette de l'entreprise, plutôt qu'une fonction d'offre nette de l'entreprise. Une correspondance est une application pouvant associer à un point de l'ensemble de départ plusieurs points dans l'ensemble d'arrivée.

Rappelons pour commencer que l'équilibre y^0 de l'entreprise aux prix p vérifie

$$\begin{aligned} p_i - \lambda f_i'\left(y^0\right) &= 0, \, i = 1, 2, ..., K, \\ f\left(y^0\right) &= 0. \end{aligned}$$

On montre facilement la propriété suivante.

Propriété 1.1. (d'homogénéité des fonctions d'offre). Les fonctions d'offre nette sont homogènes de dégré 0 par rapport aux prix p.

En effet, si tous les prix sont multipliés par une même constante t positive, le plan de production initial y^0 reste réalisable et vérifie les conditions d'optimalité (en multipliant λ par t). C'est-à-dire que l'équilibre de l'entreprise n'est pas modifié.

Pour obtenir d'autres propriétés moins immédiates des fonctions d'offre, considérons une modification infinitésimale du vecteur de prix dp et cherchons les ajustements dy de l'équilibre initial y^0 nécessaires pour retrouver le nouvel équilibre de l'entreprise ; autrement dit, $y^0 + dy$ est l'équilibre de l'entreprise pour les prix $p + dp$.

En différentiant le système précédent, on obtient

$$\begin{aligned} -\lambda \sum_{j=1}^{K} f''_{ij}\left(y^0\right) dy_j - d\lambda f'_i\left(y^0\right) + dp_i &= 0,\ i = 1, 2, ..., K, \\ \sum_{i=1}^{K} f'_i\left(y^0\right) dy_i &= 0, \end{aligned}$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \lambda f''_{11}\left(y^0\right) & \cdots & \lambda f''_{1K}\left(y^0\right) & f'_1\left(y^0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda f''_{K1}\left(y^0\right) & \cdots & \lambda f''_{KK}\left(y^0\right) & f'_K\left(y^0\right) \\ f'_1\left(y^0\right) & \cdots & f'_K\left(y^0\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_K \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dp_1 \\ \vdots \\ dp_K \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit encore

$$\begin{bmatrix} \lambda D^2 f\left(y^0\right) & Df\left(y^0\right) \\ \left(Df\left(y^0\right)\right)' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dp \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce système linéaire caractérise les ajustements de l'équilibre de l'entreprise autour d'un équilibre initial donné y^0, après la modification du vecteur des prix. La solution en dy de ce système détermine donc les propriétés de la fonction d'offre de l'entreprise. Supposant que cette solution existe et est unique, c'est-à-dire que la matrice

$$\begin{bmatrix} \lambda D^2 f & Df \\ (Df)' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

existe (en posant $A(K, K)$, $B(K, 1)$ et $C(1, 1)$), on écrit

$$\begin{bmatrix} dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$dy = Adp.$$

On montre que la matrice inverse est symétrique et que son sous-bloc A définit une matrice semi-définie positive (Cf. 1.9. Annexe). On en déduit les deux propriétés suivantes.

Propriété 1.2. (de symétrie des effets de substitution). Les effets de substitution entre biens sont symétriques.

En effet, on a

$$\frac{dy_i}{dp_j} = a_{ij} = a_{ji} = \frac{dy_j}{dp_i}, \text{ pour tout } i \text{ et } j,$$

du fait que la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique.

Cette propriété permet de définir sans ambiguïté les notions de substituabilité et de complémentarité des biens pour l'entreprise. Deux biens sont substituts si $a_{ij} = a_{ji} < 0$ (si le prix du bien j augmente, l'entreprise offre moins de bien i) et compléments si $a_{ij} = a_{ji} > 0$ (si le prix du bien j augmente, l'entreprise offre plus de bien i).

Propriété 1.3. (de croissance de la fonction d'offre). L'offre d'un bien par l'entreprise est non décroissante avec le prix de ce bien.

En effet, on a

$$\frac{dy_i}{dp_i} = a_{ij} \geqslant 0,$$

du fait que la matrice $A = (a_{ij})$ est semi-définie positive (tous les termes de la diagonale sont positifs ou nuls).

1.9. Annexes.

La condition du second ordre s'écrit

$$z \in R^K \text{ et } (Df)' z = 0 \Rightarrow z' \left(D^2 f\right) z \geqslant 0.$$

Comme

$$\begin{bmatrix} z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda D^2 f & Df \\ (Df)' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda z' \left(D^2 f\right) z,$$

elle s'écrit aussi (sachant que le multiplicateur de Lagrange λ est positif)

$$z \in R^K \text{ et } (Df)' z = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda D^2 f & Df \\ (Df)' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Posons (avec $\alpha\,(K,1)$ et $\beta\,(1,1)$)

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda D^2 f & Df \\ (Df)' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda D^2 f z \\ (Df)' z \end{bmatrix}.$$

Si z parcourt R^K, on voit que α parcourt R^K (la matrice $D^2 f$ est inversible). La condition $(Df)' z = 0$ implique $\beta = 0$.

En notant

$$\begin{bmatrix} \lambda D^2 f & Df \\ (Df)' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix},$$

on a

$$\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

et, en substituant dans la condition du second ordre,

$$\alpha \in R^K \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha' A \alpha \geqslant 0.$$

Ceci implique que la matrice A est semi-définie positive.

1.10. Corrigé des exercices.

Exercice 1.1.

a) Représenter graphiquement l'intersection de l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2, y_3) \in IR^3; f(y_1, y_2, y_3) \leq 0\}$ avec le plan isoquant $y_3 = q > 0$ pour la technologie Leontief : $f(y_1, y_2, y_3) = \max\{ay_1, by_2\} + y_3$, $a, b > 0$.

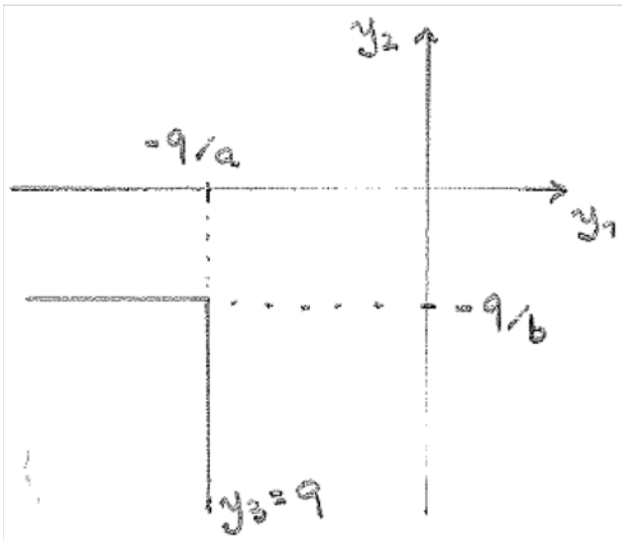
On doit représenter les points (y_1, y_2) tels que :

$$f(y_1, y_2, q) = \max\{ay_1, by_2\} + q \leqslant 0$$

Pour tracer la frontière (les plans de production techniquement efficaces), on distingue 3 cas :

- $ay_1 > by_2$ et $f(y_1, y_2, q) = q + ay_1 = 0$, soit $y_1 = -q/a$ et $y_2 < -q/b$.
- $ay_1 = by_2$ et $f(y_1, y_2, q) = q + ay_1 = q + by_2 = 0$, soit $y_1 = -q/a$ et $y_2 = -q/b$.
- $ay_1 < by_2$ et $f(y_1, y_2, q) = q + by_2 = 0$, soit $y_1 < -q/a$ et $y_2 = -q/b$.

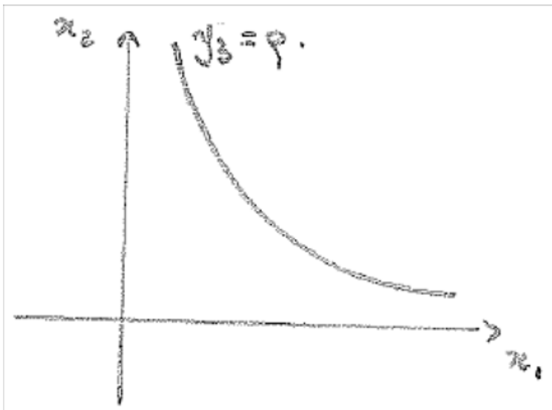
Tous les points au SO de cette frontière appartiennent aussi à l'ensemble considéré. En effet, $f(y_1, y_2, y_3)$ est croissante avec y_1 et y_2.



b) Faire la représentation graphique d'une isoquante $y_3 = q$ pour la technologie Cobb-Douglas : $y_3 = g(z_1, z_2) = z_1^a z_2^{1-a}$, $0 < a < 1$. On prendra $a = 1/2$.

On doit représenter les points (z_1, z_2) tels que :

$$g(z_1, z_2) = z_1^{1/2} z_2^{1/2} = q \Longleftrightarrow z_2 = q^2/z_1$$



Exercice 1.2. Montrer ces conséquences des hypothèses 1.3 et 1.4.

* Supposons que l'ensemble de production vérifie l'hypothèse 1.3 et soit représenté par la fonction de production $y_K = g(z)$, avec $z \in R^{K-1}$. Pour le reste de l'exercice, on se souvient que $(-z_1, ..., -z_{K-1}, y_K) \in Y \Longleftrightarrow y_K \leqslant g(z)$ (c'est la plus grande quantité du bien K qu'on peut obtenir à partir du vecteur d'inputs z).

Par définition de g : $(-z_1, ..., -z_{K-1}, g(z)) \in Y$. Par l'hypothèse 1.3, en multipliant chaque composante par $t > 0$, on obtient encore un plan de production possible : $(-tz_1, ..., -tz_{K-1}, tg(z)) \in Y$. Donc :

$$tg(z) \leqslant g(tz) \qquad (1)$$

De même, par définition de g : $(-tz_1, ..., -tz_{K-1}, g(tz)) \in Y$. Par l'hypothèse 1.3, en multipliant chaque composante par $1/t > 0$, on obtient encore un plan de production possible : $(-z_1, ..., -z_{K-1}, (1/t)\, g(tz)) \in Y$ $(t > 0)$. Donc :

$$(1/t)\, g(tz) \leqslant g(z) \qquad (2)$$

On déduit de (1) et (2) que : $\forall t > 0$, $\forall z \in R^{K-1}$, $g(tz) = tg(z)$.

* Supposons maintenant que l'ensemble de production vérifie l'hypothèse 1.4 et soit représenté par la fonction de production $f(y)$, avec $y \in R^K$. On se contentera ici de considérer les points tels que $f(y) = 0$.

Soient deux plans de production y^1 et y^2 vérifiant $f\left(y^1\right) = f\left(y^2\right) = 0$. Par l'hypothèse 1.4, toute combinaison convexe de y^1 et y^2 est possible : $\forall t \in [0,1]$, $ty^1 + (1-t)\,y^2 \in Y$. Donc $f\left(ty^1 + (1-t)\,y^2\right) \leqslant 0 = \min\left\{f\left(y^1\right), f\left(y^2\right)\right\}$.

Exercice 1.3. Calculer le TMS_{12} pour la technologie Cobb-Douglas donnée à l'exercice 1.1.

En utilisant la définition : $TMS_{12} = g_1'(z)/g_2'(z)$, on a : $TMS_{12} = \frac{a}{1-a}\frac{z_2}{z_1}$.