ANNEXE 1 – Notions mathématiques utilisées (d'après Michel, 1989)

Définition : une fonction f, définie sur un sous-ensemble convexe C de IR^n, est strictement quasi-concave si :

$$\forall (X_0, X_1) \in C^2, \forall s \in [0, 1], f(s X_0 + (1 - s) X_1) > \min \{f(X_0), f(X_1)\}.$$

Théorème du langrangien généralisé :

Soit C un sous-ensemble de IR^n. On considère le problème d'optimisation suivant :

Maximiser $f(X)$ sur l'ensemble A des points X de C qui vérifient :

$$g_i(X) \leq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } h_j(X) = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq q.$$

La fonction f est appelée la fonction objectif, les p conditions d'inégalités sont appelées contraintes et les q conditions d'égalité sont appelées liaisons.

Le lagrangien généralisé du problème d'optimisation est la fonction de X :

$$L(X) = a_0 f(X) - \Sigma_i a_i g_i(X) - \Sigma_j b_j h_j(X)$$

qui dépend de $p + q + 1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ appelés multiplicateur et ayant les propriétés suivantes :

1) les $p + q + 1$ multiplicateurs $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ ne sont pas tous nuls,

2) les $p + 1$ multiplicateurs $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont tous positifs ou nuls.

Théorème (condition nécessaire d'optimalité) :

Soit X^* un point intérieur de C. Si X^* est une solution optimale locale du problème d'optimisation et si les $p + q + 1$ fonctions f, g_i et h_j sont continues sur un voisinage de X^* et différentiable en X^*, il existe $p + q + 1$ multiplicateurs du lagrangien généralisé vérifiant les propriétés 1 et 2 et tels que :

3) les p multiplicateurs des contraintes vérifient les relations d'exclusion :

$$a_i g_i(X) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p,$$

4) les n dérivées partielles en X^* du lagrangien généralisé sont égales à 0.

On dit que le problème d'optimisation est convexe si l'ensemble C est convexe, la fonction f est concave sur C, les fonctions g_i ($1 \leq i \leq p$) sont convexes sur C et les fonctions h_j ($1 \leq j \leq q$) sont affines sur C.

Théorème (condition suffisante d'optimalité globale) :

On suppose que f, g_i ($1 \leq i \leq p$) et h_j ($1 \leq j \leq q$) sont différentiables en X^*. Si le problème d'optimisation est convexe et si la différentielle du lagrangien est nulle, alors X^* est une solution optimale globale du problème d'optimisation.