TD 4

I En économie, on associe à une fonction dite totale (coût total ou recette totale...) définie sur $]0,+\infty[$, la fonction moyenne f_M définie sur $]0,+\infty[$, par $f_M(x) = f(x)/x$ et la fonction marginale f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(q) = q^3 - 6q^2 + 9q + 32$$

Etudier et représenter dans le même repère les fonctions totale, moyenne et marginale.

Vérifier que 4 est un point critique de la fonction moyenne.

On précisera les points d'intersection des fonctions totale et moyenne, ainsi que les points d'intersection des fonctions

moyenne et marginale.

La fonction est définie sur $]0,+\infty[$.

Les limites sont :

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 0} f(q) &= 32 \\ \lim_{q\to +\infty} f(q) &= +\infty \end{aligned}$$

La fonction moyenne est :

$$f_M(q) = q^2 - 6q + 9 + \frac{32}{q}$$

Les limites sont :

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 0} f_M(q) &= +\infty \\ \lim_{q\to +\infty} f_M(q) &= +\infty \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de la fonction moyenne :

$$f'_M(q) = 2q - 6 - \frac{32}{q^2}$$

Un point critique de la fonction moyenne vérifie $f'_M(q) = 0$. On a :

$$f'_M(4) = 8 - 6 - \frac{32}{16} = 0.$$

Ceci prouve que 4 est bien un point critique de $f_M(q)$.

Etudions les points d'intersection des fonctions totale et moyenne :

$$f(q) = \frac{f(q)}{q} = f_M(q) \Leftrightarrow q = 1 \text{ (sachant } f(q) > 0)$$

La dérivée (i.e., la fonction marginale) est :

$$f_m(q) = f'(q) = 3q^2 - 12q + 9 = 3(q-1)(q-3)$$

Les limites sont :

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 0} f_m(q) &= 9 \\ \lim_{q \to +\infty} f_m(q) &= +\infty \end{aligned}$$

On a donc $f_m(q) > 0$ sur $]0,1[$ et $]3,+\infty[$, $f_m(q) < 0$ sur $]1,3[$. On en déduit que la fonction totale $f(q)$ est strictement croissante sur $]0,1[$ et $]3,+\infty[$, décroissante sur $]1,3[$.

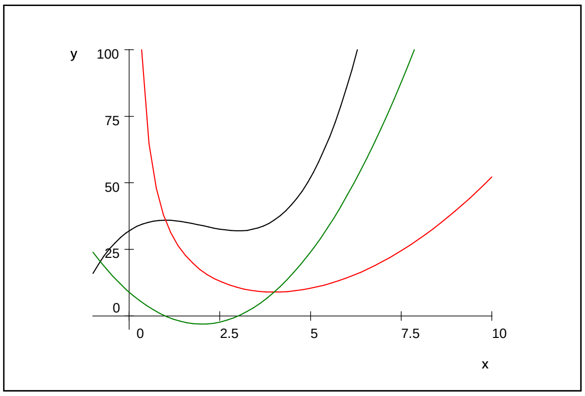
Etudions les points d'intersection des fonctions moyenne et marginale :

$$\begin{aligned} f_M(q) &= q^2 - 6q + 9 + \frac{32}{q} = 3q^2 - 12q + 9 = f_m(q) \\ \iff & \quad q^3 - 3q^2 - 16 = 0 \\ \iff & \quad (q-3)\,q^2 = 16 \end{aligned}$$

Notons que le membre de gauche est négatif si $q < 3$ et qu'il est strictement croissant avec q si $q < 3$ (la dérivée est $3q(q-2)$). L'équation ci-dessus a donc une unique solution. On remarque que si $q = 4$, on a : $(4-3)(4)^2 = 16$. C'est donc la solution cherchée.

Pour la représentation graphique, on calcule les valeurs :

$f(1) = 36 \qquad f(3) = 32 \qquad f_M(4) = f_m(4) = 9 \qquad f_m(2) = -3$



2. Démontrer que si x^* est un point critique de la fonction moyenne, alors en ce point les fonctions moyenne et marginale coïncident.

Par définition, on a :

$$f_M(q) = \frac{f(q)}{q}$$

Par conséquent:

$$f'_M(q) = \frac{f'(q)\, q - f(q)\, 1}{q^2}$$

La dérivée s'annule donc quand $f'(q) = f(q)/q$. Avec les notations de l'exercice, si x^* est un point critique de la fonction moyenne, alors $f_M(x^*) = f_m(x^*)$.

3. Si la fonction totale est à dérivée seconde strictement positive sur $]0, +\infty[$, montrer que tout point stationnaire de la fonction moyenne est un minimum de cette fonction.

On suppose que $f''(q) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Soit x^* un point stationnaire de cette fonction : $f'(x^*) = 0$.

Puisque $f''(q) > 0$ sur $]0, +\infty[$, on a :

$f'(x) < 0$, pour tout $x < x^*$;

$f'(x) > 0$, pour tout $x > x^*$.

Autrement dit, la fonction $f(x)$ est strictement décroissante sur $]0, x^*[$ et strictement croissante sur $]x^*, +\infty[$. Elle a donc un minimum global en x^*.

II La production de x unités d'un bien coûte, en €:

$$C(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3$$

1. Quelle est l'expression du coût marginal ?

$$Cm(x) = 2 - 0,04x + 0,00021x^2$$

2. Calculer et interpréter $C'(100)$

On a : $C'(100) = 2 - 0,04(100) + 0,00021(100)^2 = 0,1$€

C'est l'accroissement du coût de production pour la production d'une unité infiniment petite supplémentaire.

3. Compare $C'(100)$ avec le coût de fabrication du 101-ième object.

On a :

$C(100) = 920 + 2(100) - 0,02(100)^2 + 0,00007(100)^3 = 990$

$C(101) = 920 + 2(101) - 0,02(101)^2 + 0,00007(101)^3 = 990,1$

4. Pour quelle valeur la fonction C a-t-elle un point d'inflexion ? Quelle est la signification de ce point ?

Un point d'inflexion d'une fonction $f(x)$ est un point où $f''(x)$ change de signe.

On a : $C''(x) = -0,04 + 0,00042x$.

Comme $C''(x) < 0$ pout tout $x < 0,04/0,00042 = 95,238$ et $C''(x) > 0$ pout tout $x > 0,04/0,00042 = 95,238$, on conclut que la fonction C a un unique point d'inflexion en $x = 95,238$.

III Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \ln\left(x^2 + 1\right)$$

On remarque que : $D_f = IR$.

1. Etudier la convexité de f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\ln\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\frac{2x}{(x^2+1)} \\
&= 2x\left(\ln\left(x^2+1\right)+1\right) \\
f''(x) &= 2\left(\ln\left(x^2+1\right)+1\right)+\frac{4x^2}{(x^2+1)}>0
\end{aligned}$$

car $\ln\left(x^2+1\right)\geq \ln 1=0$ et $\frac{4x^2}{(x^2+1)}\geq 0$.
On en déduit que f est convexe sur IR.

2. f admet elle des extrema sur son domaine de définition ? Sur $[1,2]$? Sur $[-2,1]$?

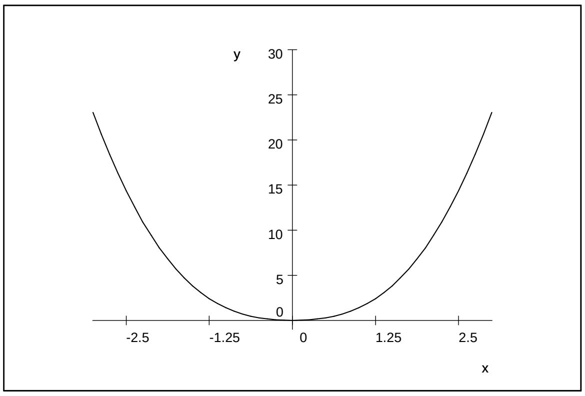
On cherche les points critiques de $f(x)$ sur IR.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 2x\left(\ln\left(x^2+1\right)+1\right)=0 \\
&\Leftrightarrow x=0
\end{aligned}$$

Comme f est strictement convexe, f atteint un minimum $f(0)=0$ sur IR pour $x=0$.

Comme $f'(x)>0$ sur $[1,2]$ (car $f'(0)=0$ et $f''(x)>0$), elle est minimum sur $[1,2]$ pour $x=1$ et maximum sur $[1,2]$ pour $x=2$.

Comme $f(0)=0$ est un minimum global sur IR, c'est aussi un minimum sur $[-2,1]$. Comme $f'(x)<0$ sur $[-2,0]$ et $f'(x)>0$ sur $[0,1]$, elle atteint un maximum local en $x=-2$ et en $x=1$. Comme $f(-2)=5\ln 5>f(1)=3\ln 3$, elle est maximum sur $[-2,1]$ en $x=-2$.



IV Soit la fonction définie par :

$$f(x)=xe^{-x}$$

1. Etudier sa convexité.
On montre que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x} \\ f''(x) &= (x-2)\,e^{-x} \end{aligned}$$

Par conséquent:
$f''(x) < 0$ et f est concave sur $]-\infty, 2[$;
$f''(x) > 0$ et f est convexe sur $]2, +\infty[$.

2. En déduire que :

$$\forall x \in [-2, 2]\,, f(x) \leq x$$

Le point $(0,0)$ appartient à la courbe C représentant $y = f(x)$. En effet, $0 = f(0)$.

La tangente à C au point (x_0, y_0) (appartenant à C) a pour expression :

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Soit, en utilisant $(x_0, y_0) = (0, 0)$, on trouve :

$$y - 0 = (1-0)\,e^{-0}\,(x-0) = x$$

Comme la courbe représentative d'une fonction concave est au-dessous de ses tangentes, on a bien, sur $[-2, 2]$, où f est concave, $f(x) \leq x$.

3. Optimiser f sur $[-2, 2]$, puis que $[-2, 0]$.
Les points critiques de f sont :

$$f'(x) = (1-x)\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Comme $1 \in [-2, 2]$ et f est concave sur $[-2, 2]$, $f(1) = e^{-1}$ un maximum local.

Comme $f'(x) > 0$ sur $[-2, 0]$, f atteint sur $[-2, 0]$ un minimum $f(-2) = -2e^2$ pour $x = -2$ et un maximum $f(0) = 0$ pour $x = 0$.

V Calculer les intégrales suivantes quand elles existent :

1. $I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$. Comme la fonction $\frac{1}{x-1}$ n'est pas définie en 1 et comme $1 \in]0, 2[$, cette intégrale n'existe pas.

2. $I_2 = \int_3^4 \frac{1}{2x+1} dx$. Comme la fonction $\frac{1}{2x+1}$ est définie et continue sur $[3, 4]$, cette intégrale existe.

Une primitive de $\frac{1}{2x+1}$ est $\frac{1}{2}\ln(|2x+1|)$. Sur l'intervalle $[3, 4]$, on a : $|2x+1| = 2x+1$. Donc, l'intégrale est :

$$I_2 = \int_3^4 \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln(9) - \ln(7)\right)$$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$. Comme la fonction $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ est définie et continue sur $[0, 1]$, cette intégrale existe.

Remarquons qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} x dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \end{aligned}$$

Un primitive de x est $\frac{1}{2}x^2$.

Une primitive de $\frac{1}{x+1}$ est $\ln(|x+1|)$. Sur l'intervalle $[0,1]$, on a : $|x+1| = x+1$. Donc, l'intégrale est :

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln(2)$$

VI Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1 = \int_1^e x \ln(x)\, dx$$

En posant : $f'(x) = x$ et $g(x) = \ln(x)$,
on trouve : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$.
Par la formule d'IPP :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^1 x e^{-x+3} dx$$

En posant : $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x+3}$,
on trouve : $f'(x) = 1$ et $g(x) = -e^{-x+3}$.
Par la formule d'IPP :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[-xe^{-x+3}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x+3} dx \\ &= -e^2 - \left[e^{-x+3}\right]_0^1 \\ &= e^3 - 2e^2 \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

En posant : $f(x) = x$ et $g'(x) = (x+1)^{-1/2}$,
on trouve : $f'(x) = 1$ et $g(x) = 2(x+1)^{1/2}$.
Par la formule d'IPP :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[2x(x+1)^{1/2}\right]_0^1 - \int_0^1 2(x+1)^{1/2}\,dx \\
&= 2\sqrt{2} - 2 - \left[\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^1 \\
&= 2\sqrt{2} - 2 - \frac{4}{3}(2)^{3/2} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

En posant : $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$,
on trouve : $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$.
Par la formule d'IPP :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

VII On cherche, dans chacun ds cas ci-dessous, la fonction totale à partir de la fonction marginale.

1. Coût marginal : $Cm(q) = \frac{4q}{\sqrt{1+2q^2}}$ avec un coût fixe de 20.

Il faut trouver la primitive $C(q)$ de $Cm(q)$ telle que $C(0) = 20$.

Une primitive de $Cm(q)$ est de la forme : $2\sqrt{1+2q^2} + C$.

On cherche C pour que $2\sqrt{1+2(0)^2} + C = 20$. On obtient $C = 18$.

La fonction de coût est donc $C(q) = 2\sqrt{1+2q^2} + 18$.

2. Recette marginale : $Rm(q) = \frac{q}{1+2q^2}$ liée à la vente de q unités d'un bien.

Il faut trouver la primitive $R(q)$ de $Rm(q)$ telle que $R(0) = 0$ (si on ne vend rien, on n'a pas de recettes).

Une primitive de $Rm(q)$ est de la forme : $\frac{1}{4}\ln\left(1+2q^2\right) + C$.

On cherche C pour que $\frac{1}{4}\ln\left(1+2q^2\right) + C = 0$. On obtient $C = 0$.

La fonction de recette totale est donc $R(q) = \frac{1}{4}\ln\left(1+2q^2\right)$.

3. Coût marginal : $Cm(q) = (6q-1)e^{3q^2-q}$ avec un coût fixe de 5.

Il faut trouver la primitive $C(q)$ de $Cm(q)$ telle que $C(0)=5$.

Une primitive de $Cm(q)$ est de la forme : $e^{3q^2-q}+C$.

On cherche C pour que $e^0+C=5$. On obtient $C=4$.

La fonction de coût est donc $C(q)=e^{3q^2-q}+4$.

4. Production marginale $Pm(L)=\frac{1}{3L+1}$ pour un niveau de travail L.

Il faut trouver la primitive $P(L)$ de $Pm(L)$ telle que $P(0)=0$ (je suppose qu'on ne produit rien sans travail !).

Une primitive de $Pm(q)$ est de la forme : $\frac{1}{3}\ln(3L+1)+C$.

On cherche C pour que $\frac{1}{3}\ln(3(0)+1)+C=0$. On obtient $C=0$.

La fonction de production est donc $P(L)=\frac{1}{3}\ln(3L+1)$.

VIII Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{(1+x)-1}=(\ln(y))'_{y=1}=1$ (par définition de la dérivée)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x+x^3-x\ln x}{7e^x+e^{-x}+x^7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\frac{4+\frac{x^3}{e^x}-\frac{x\ln x}{e^x}}{7+e^{-2x}+\frac{x^7}{e^x}}=\frac{4}{7}$ (car $\frac{x^3}{e^x}$, $\frac{x\ln x}{e^x}$, e^{-2x} et $\frac{x^3}{e^x}$ tendent vers 0)

$\lim_{x\to0^+}\frac{\exp(x^2)-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\exp(x^2)-\exp(0^2)}{x}=\left(\exp\left(y^2\right)\right)'_{y=0}=\left(2y\exp\left(y^2\right)\right)_{y=0}=0$ (par définition de la dérivée)

IX La production est donnée en fonction de la quantité de travail fourni par :

$$Q=5e^{-\frac{1}{L}}$$

Calculer l'élasticité de la production par rapport au travail :

$e_{Q/L}=\frac{L\left(5e^{-\frac{1}{L}}\right)'}{5e^{-\frac{1}{L}}}=\frac{L\left(\frac{5}{L^2}e^{-\frac{1}{L}}\right)}{5e^{-\frac{1}{L}}}=\frac{1}{L}$

On veut augmenter la production de 1% sachat qu'on se situe au niveau de travail $L_0=10$. De combien doit-on faire varier le travail ?

Il faut calculer $e_{L/Q}$. En effet, $e_{L/Q}$ mesure l'accroissement en % de la quantité de travail nécessaire pour augmenter la prodution de 1% à partir d'une quantité Q donnée. Ici, on prend : pour $L_0=10$, on a : $Q_0=5e^{-\frac{1}{10}}$.

Pour calculer $e_{L/Q}$, remarquons que : $Q=5e^{-\frac{1}{L}}\Leftrightarrow L=-\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-1}$.

On a alors :

$e_{L/Q}=\frac{Q\left(-\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-1}\right)'}{-\frac{1}{\ln\left(\frac{Q}{5}\right)}}=-Q\frac{1}{Q}\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-2}\ln\left(\frac{Q}{5}\right)=-\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-1}$

NB : $\left(-\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-1}\right)'=\frac{1}{Q}\left(\ln\left(\frac{Q}{5}\right)\right)^{-2}$

Donc l'élasticité en $Q_0=5e^{-\frac{1}{10}}$ est égale à $e_{L/Q}=-\left(\ln\left(\frac{5e^{-\frac{1}{10}}}{5}\right)\right)^{-1}=10$

X Déterminer les fonctions dérivables et strictement positives sur IR_+^* dont l'élasticité est constante.

On cherche $f(x)$, définie, dérivable (de dérivée $f'(x)$) et positive ($f(x) > 0$) sur IR_+^* et telle que :

$$(\ln(f(x)))' = \frac{xf'(x)}{f(x)} = k$$

On a donc, pour tout x, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x}$.

Donc $(\ln f(x))' = (k\ln(x))'$.

Par conséquent : $\ln f(x) = k\ln(x) + C$ (avec C une constante).

Finalement : $f(x) = e^{k\ln(x)+C} = e^C e^{\ln\left(x^k\right)}$

On a montré que $f(x)$ s'écrit sous la forme Kx^k, où K et k sont deux constantes.

XIII On note $R(t)$ la richesse d'un agent au cours du temps mesuré en année.

1) En supposant que notre ami place son argent sur un compte rémunéré au taux r supposé constant au cours du temps, et qu'il n'a pas d'autre source de revenus, montrer que pour tout t on a :

$$R'(t) = rR(t)$$

(raisonner sur un petit intervalle $[t, t+\Delta t]$ et faire tendre Δt vers 0)

S'il place $R(t)$ pendant une unité de temps, il gagne $rR(t)$ en intérêts

S'il place $R(t)$ pendant Δt unité de temps, il gagne $rR(t)\Delta t$ en intérêts.

Si c'est sa seule source de revenu :

$R(t+\Delta t) = R(t) + rR(t)\Delta t$.

On en déduit que :

$\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} = rR(t)$

$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} = R'(t) = rR(t)$

2) En notant $R(0) = R_0$, en déduire la valeur de $R(t)$ en fonction de R_0, t et r.

On part de $R'(t) = rR(t)$. On en déduit que $(\ln R(t))' = \frac{R'(t)}{R(t)} = (rt)'$.

Ceci implique que $\ln(R(t)) = rt + c$ (avec c une constante).

Par conséquent : $R(t) = \lambda e^{rt}$ (avec $\lambda = e^c$).

Sachant que $R(0) = R_0$, la constante λ doit être fixée égale à R_0.

Finalement, on a : $R(t) = R_0 e^{rt}$.

3) En déduire la richesse de notre agent au bout de 5 ans, s'il dispose d'une richesse initiale de 1000 € et si le taux d'intérêt est de 0,05.

$R(5) = 1000e^{0.05*5} = 1284$

4) Toujours avec les mêmes hypothèses que dans 4), déterminer au bout de combien de temps la richesse de l'individu a été multipliée par 1,2.

On cherche t tel que $R(t) = 1,2R_0$. On a donc $e^{0.05t} = 1,2$. Soit : $t = \frac{\ln(1.2)}{0.05} = 3.64$ ans.