Chapitre III

ANALYSE POSITIVE DES METHODES DE CHOIX COLLECTIF

1) La règle majoritaire

i) *Principe*

Chaque électeur vote pour un candidat, un programme, une issue, etc. Celui ou celle recueillant le plus grand nombre de suffrages est élu.

ii) *La majorité optimale*

Considérons un vote sur la fourniture et le financement d'un bien public. Un programme définit la quantité produite du bien public et la contribution des électeurs au financement du coût de production de cette quantité. Les votants, au nombre de n, négocient le programme avant de le mettre au vote. Après délibération, le projet est mis au vote et élu s'il remporte au minimum k suffrages ($1 \leq k \leq n$), définissant la majorité qualifiée.

Buchanan et Tullock (1962) étudient le choix de la majorité qualifiée k. Ils affirment que :

- si $k = n$ (vote à l'unanimité), le programme élu décentralise toujours un état optimal (puisque chaque électeur peut opposer un veto à tout programme qui lui serait défavorable) ; si $k < n$, le vote risque de ne pas désigner un état optimal. Il existe donc un *coût externe* de la règle de vote (le choix de k), noté C, vérifiant :

C décroît avec k et est nul quand $k = n$,

- d'un autre côté, plus k est grand, plus la négociation d'un programme éligible est longue et difficile. Il existe donc un coût de la procédure de vote (le choix de k), noté D (essentiellement, le temps nécessaire à la décision). Le *coût de décision* vérifie :

D est nul quand $k = 1$ et croît avec k.

Définition :

La majorité qualifiée optimale est le nombre k^* tel que la somme du coût externe C et du coût de décision D est minimale.

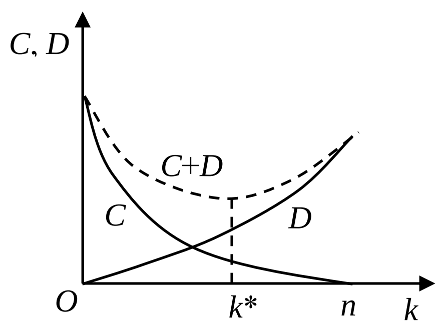

Figure 1. Majorité qualifiée optimale.

On tire les enseignements suivants :

- la majorité qualifiée optimale dépend de la forme de *C* et *D*, donc des caractéristiques de la décision à prendre ;

- *a priori*, k^* augmente quand :

    - les préférences pour le bien public sont très hétérogènes (ce qui augmente *C*) ;
    - le coût du temps diminue (ce qui diminue *D*) ;

- l'effet d'une augmentation de *n* est ambigu : si *n* augmente, k/n restant le même, *D* augmente sous l'effet taille (négociation plus longue, coûtant à un plus grand nombre), mais *C* diminue, du fait qu'une population plus nombreuse doit avoir *a priori* des préférences plus homogènes.

Ce modèle est infirmé par les faits : la majorité simple $k/n = 1/2$ est très largement dominante. En réponse, Reiner (1951) affirme que *D* présente une discontinuité au point $k = n/2$. En effet, si $k/n < 1/2$, le processus de décision devient très instable, puisqu'une motion et sa contraire peuvent être éligibles simultanément. Le seuil $k/n = 1/2$ est la plus petite majorité qui permet de contourner ce problème.

Sous cette hypothèse, la figure 1 est modifiée de la façon suivante. La majorité qualifiée optimale devient alors $n/2$, dans un grand nombre de cas.

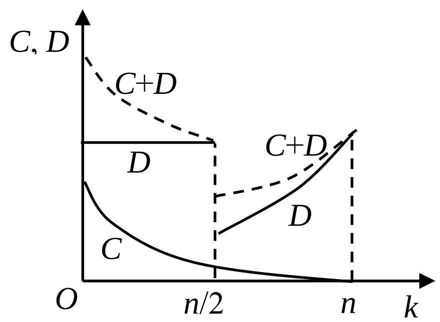

Figure 2. Coût de décision discontinu.

iii) *Propriétés de la majorité simple* : 2 candidats

Soit :

$A = \{x, y\}$ = ensemble des candidats ;

n = nombre des votants ;

$D_i \in \{-1, 0, 1\}$ = préférence de l'électeur *i*, avec la convention :

$D_i = 1$	=	*i* préfère *x* à *y*,
$D_i = -1$	=	*i* préfère *y* à *x*,
$D_i = 0$	=	*i* est indifférent.

$D \in \{-1, 0, 1\}$ = préférence sociale, avec la convention :

$D = 1$	=	le groupe élit *x*,
$D = -1$	=	le groupe élit *y*,
$D = 0$	=	le groupe est indifférent.

Définition :

De façon générale, une règle de choix collectif (pour le groupe des n électeurs) est une fonction f qui, aux nombres $D_1, \ldots, D_n$ (définissant un profil d'opinions), associe un nombre D, avec la convention ci-dessus :

$$\begin{aligned} f : \{-1, 0, 1\}^n &\rightarrow \{-1, 0, 1\} \\ D_1, \ldots, D_n &\rightarrow D \end{aligned}$$

Dans le cas de la règle de vote à la majorité simple, la fonction f associée est définie par :

$$f(D_1, \ldots, D_n) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \Sigma_i D_i > 0 \\ 0 & \text{si } \Sigma_i D_i = 0 \\ -1 & \text{si } \Sigma_i D_i < 0 \end{array} \right.$$

Propriétés :

La règle à la majorité simple vérifie les propriétés :

1) propriété de Bentham : elle est définie pour n'importe quel profil d'opinions $D_1, \ldots, D_n$ (i.e., $f(D_1, \ldots, D_n)$ est définie sur le produit cartésien $\{-1, 0, 1\}^n$) ;
2) elle est anonyme : si l'on permute les valeurs des nombres $D_1, \ldots, D_n$, la valeur $f(D_1, \ldots, D_n)$ n'est pas affectée (i.e., $f(D_1, \ldots, D_n)$ est symétrique) ;
3) elle est neutre : si chacun des nombres $D_1, \ldots, D_n$ est remplacé par son opposé, le nombre D résultant est, lui aussi, remplacé par son opposé (i.e., $f(D_1, \ldots, D_n)$ est impaire) ;
4) elle est monotone : si, pour un profil d'opinions $D_1, \ldots, D_n$, la valeur de f est 0 ou 1, et si l'un des nombres $D_1, \ldots, D_n$ augmente strictement (i.e., passe de – 1 à 0 ou 1, ou de 0 à 1), alors la nouvelle valeur de f (pour le nouveau profil d'opinions) est 1.

La propriété de Bentham est synonyme de liberté d'opinion. L'anonymat garantit l'égalité des électeurs dans le vote. La neutralité garantit l'impartialité vis-à-vis des candidats.

Toutes ces propriétés sont faciles à vérifier. En fait, on a le théorème suivant.

Théorème : May (1952)

S'il y a deux candidats, la seule règle de choix collectif vérifiant les quatre propriétés précédentes est la règle à la majorité simple.

En effet, par la propriété d'anonymat, $f(D_1, \ldots, D_n)$ ne dépend que du nombre d'électeurs préférant l'un des candidats à l'autre, c'est-à-dire du nombre de 1, notons-le N(1), et du nombre de – 1, notons-le N(– 1), qui figurent dans la suite de nombre $D_1, \ldots, D_n$.
Utilisons maintenant la propriété de symétrie : si N(1) = N(– 1), alors $D = 0$ (par l'absurde).
En effet, si on imagine que $D = 1$, changeant chaque D_i en son opposé, on changerait également D en son opposé, ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse d'anonymat, puisque

ceci ne changerait pas la valeur commune de N(1) et N(– 1) ; de même, on exclut l'hypothèse $D = -1$. (On vient donc de démontrer qu'une méthode anonyme et neutre classe *ex-aequo* les candidats en cas de partage égal des voix.)
Supposons maintenant que N(1) = N(– 1) + 1. La propriété de monotonie implique que D, qui valait 0 en cas de partage égal, vaut maintenant 1 et, par une récurrence immédiate, D vaut encore 1 si :

$$N(1) = N(-1) + 2,\ N(1) = N(-1) + 3, \text{ etc.}$$

en un mot, si N(1) > N(– 1), ce qui est la définition du vote majoritaire.

La règle majoritaire ainsi définie ne désigne pas de vainqueur en cas d'*ex-aequo*. En pratique, trois méthodes sont utilisées : la voix prépondérante du président ; le bénéfice de l'âge ; ou un tirage aléatoire. On note que les deux premières pratiques violent une des conditions : la voix prépondérante du président rompt l'anonymat, le bénéfice de l'âge rompt la neutralité.

Définition :

Une règle de choix collectif est dite *non manipulable* si chaque électeur a intérêt à voter conformément à son opinion, quel que soit l'état de l'opinion. Autrement dit, quand la règle de choix collectif est non manipulable, le votant favorise le candidat qu'il préfère ; il utilise son vote pour déclarer ses préférences.

Proposition :

S'il y a *deux* candidats, ces deux propositions sont équivalentes :
(i) la règle de choix collectif f est non manipulable ;
(ii) la règle de choix collectif f est monotone.

Montrons d'abord l'implication (i) ⇒ (ii) : Si f est non manipulable :
i favorise son candidat préféré en votant – 1, 0, 1, respectivement quand $D_i = -1, 0, 1$.
Donc :

- si $D_i = -1$: $f(D_1, \ldots, D_n) \leq f(0, D_{\hat{\imath}}) = f(D_1, \ldots, D_{i-1}, 0, D_{i+1}, \ldots, D_n) \leq f(1, D_{\hat{\imath}})$
- si $D_i = 0$: comme l'individu est indifférent sur l'issue du vote, aucune condition sur f
- si $D_i = 1$: $f(D_1, \ldots, D_n) \geq f(0, D_{\hat{\imath}}) \geq f(-1, D_{\hat{\imath}})$

Ces propriétés doivent être vraies pour tout i et tout $D_{\hat{\imath}}$. Donc f est monotone.
Montrons maintenant l'implication (ii) ⇒ (i) : Si f est monotone :

$$\text{pour tout } i \text{ et tout } D_{\hat{\imath}} : f(-1, D_{\hat{\imath}}) \leq f(0, D_{\hat{\imath}}) \leq f(1, D_{\hat{\imath}})$$

Par conséquent, quel que soit l'état de l'opinion $D_{\hat{\imath}}$, le votant favorise le candidat qu'il préfére s'il vote D_i.

iv) *Propriétés de la majorité simple* : p candidats ($p > 2$)

S'il y a plus de deux candidats, un bulletin de vote, portant un seul nom, n'exprime pas toute l'opinion des électeurs. La règle majoritaire peut alors conduire à des paradoxes.

Par exemple, considérons la situation suivante, où 90 votants élisent, à la majorité relative, un candidat parmi a, b et c.

Nbre de votants	Classement
34 votants	$c\ b\ a$
29 votants	$a\ b\ c$
27 votants	$b\ a\ c$

Tableau 1. Paradoxe de Condorcet.

Dans cet exemple, la règle majoritaire désigne le candidat c (34 suffrages, contre 29 pour a et 27 pour b). Et pourtant, une majorité de 56 votants le place en dernier.

D'autres règles sont envisageables :

- la majorité absolue : un candidat est élu s'il obtient plus de la moitié des suffrages ;
- le critère de Condorcet : un candidat est élu s'il bat tous les autres à la majorité simple (dans un duel par paires). On appelle un tel candidat vainqueur de Condorcet ;
- le vote majoritaire à deux tours : un candidat est élu au premier tour s'il obtient la majorité absolue ; sinon, les deux premiers candidats du premier tour s'opposent au second tour à la majorité simple.

Remarque : dans l'exemple précédent, a est élu au scrutin majoritaire à deux tours ; b est vainqueur de Condorcet ; c est choisi à la majorité simple ; personne n'est élu à la majorité absolue.

Comparons ces différentes règles, suivants différents critères.

Définition :

On dit qu'une règle de choix collectif est décisive s'il existe toujours (pour tout profil d'opinions) un candidat qui remplit les conditions d'éligibilité fixées par la règle.

On montre que parmi les trois méthodes ci-dessus, seul le vote majoritaire à deux tours est décisif :

- il est rare qu'un candidat soit classé en premier rang dans au moins la moitié de la population des votants, dès que le nombre de candidats est suffisamment grand. En pareil cas, la règle à la majorité absolue n'est pas décisive ;
- un vainqueur de Condorcet n'existe pas toujours, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Votants \Candidats	*a*		*b*		*c*		*a*
1		>		>		(<)	
2		>		(<)		>	
3		(<)		>		>	
Groupe		→		→		→	

Tableau 2. Absence de vainqueur de Condorcet.
Légende : $x > y$ = l'individu préfère x à y ;
$x \rightarrow y$ = x bat y à la majorité simple ;
(<) = déduit de la transitivité des préférences.

- quel que soit l'état de l'opinion, deux candidats sont retenus au second tour (si plus de deux candidats sont éligibles au second tour, les candidats retenus sont choisis en dehors du vote) ; au second tour, ou bien un candidat est élu, ou bien ils arrivent *ex-aequo* (auquel cas, on peut imaginer un choix hors vote). Dans tous les cas, il existe au moins un candidat qui remplit les conditions : 1) il est premier ou second au premier tour et 2) il obtient au moins la moitié des suffrages au second tour.

Pour continuer la comparaison, supposons que l'état de l'opinion est tel qu'il existe un vainqueur de Condorcet (les conditions à imposer sur les préférences pour obtenir ce résultat seront discutées plus loin ; cf. Sous-Sect. v).

Rappelons qu'un vainqueur de Condorcet est un candidat qui bat à la majorité simple tout autre candidat. D'un point de vue normatif, il est *a priori* souhaitable qu'une règle de choix collectif désigne un tel candidat (quand il existe). On montre que :

- la règle à la majorité absolue élit toujours un vainqueur de Condorcet, lorsqu'elle est décisive (en effet, si un candidat obtient plus de la moitié des voix, c'est-à-dire est en premier rang dans l'ordre de préférence de plus de la moitié des votants, il bat tous les autres candidats à la majorité simple) ; par contre, il est possible que le vote à la majorité absolue ne soit pas décisif, alors qu'il existe un vainqueur de Condorcet ;
- le scrutin majoritaire à deux tours peut désigner un candidat différent du vainqueur de Condorcet. En effet, reprenons l'exemple du tableau 1.

Nbre de votants	Classement
34 votants	*c b a*
29 votants	*a b c*
27 votants	*b a c*

Tableau 1 (reproduit). Un premier paradoxe.

Le candidat *b* est vainqueur de Condorcet : il obtient 34 + 27 voix contre *a* et 29 + 27 voix contre *c*. Le candidat *a* est élu au scrutin majoritaire à deux tours : au premier tour, les candidats *c* et *a* arrivent en première et seconde places, respectivement ; au second tour, *a* est élu face à *c*, avec 29 + 27 suffrages.

Pour terminer ce tour d'horizon des propriétés des trois règles étudiées, on peut montrer que le scrutin majoritaire à deux tours est manipulable. On s'appuie à nouveau sur l'exemple du tableau 1. Les 34 votants de la première ligne, en votant pour *c* au premier tour, sont la cause de l'élimination du candidat *b* au second tour, donc, en fin de compte, de l'élection de *a* ; pourtant, ils préfèrent *b* à *a*. On en déduit qu'ils ont intérêt à voter pour *b* au premier tour. De cette façon, au premier tour :

b est en tête, avec 34 + 27 voix,
a est en seconde position, avec 29 voix,
et *c* n'a aucun suffrage.

Il n'y a pas de second tour, puisque *b* a la majorité absolue. D'ailleurs, même si un second tour avait lieu, *b* serait élu face à *a* avec 34 + 27 voix.

v) *Théorème de l'électeur médian* (Black, 1948)

Reprenons l'exemple du tableau 2 :

Votants \Candidats	*a*		*b*		*c*		*a*
1		>		>		(<)	
2		>		(<)		>	
3		(<)		>		>	
Groupe		$\rightarrow$		$\rightarrow$		$\rightarrow$	

Tableau 2 (reproduit). Absence de vainqueur de Condorcet.

Cet exemple met en évidence le fait qu'il n'existe pas toujours de vainqueur de Condorcet. On constate également que, partant de préférences individuelles transitives (propriété qui s'écrit : si $x > y$ et $y > z$, alors $x > z$), la règle à la majorité simple conduit, après agrégation, à un classement du groupe non transitif :

La relation $x \rightarrow y$ (x bat y à la majorité simple) est cyclique : $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$.

Cet exemple peut être généralisé. On considère la situation où il existe trois candidats *a*, *b* et *c*, et un nombre impairs de votants tous capables de classer les candidats avec des préférences strictes, c'est-à-dire sans jamais exprimer d'indifférence.

Dans cette situation, on peut montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il n'existe pas de vainqueur de Condorcet ;

(ii) l'ordre induit par la règle à la majorité est cyclique.

Démonstration :

Notons d'abord que, puisque le nombre d'électeurs est impair et les préférences individuelles entre deux candidats sont toujours strictes, chaque duel entre une paire quelconque de candidats désigne un vainqueur à la majorité simple :

Pour tout x et y pris dans $\{a, b, c\}$, on a : $x \to y$ ou $y \to x$.

Autrement dit, il n'y a jamais d'*ex-aequo*.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Considérons le candidat a ; il bat b ou c, mais pas les deux. Supposons que $a \to b$ et $c \to a$. Si $c \to b$, c est vainqueur de Condorcet, ce qui contredit l'hypothèse (i) ; donc $b \to c$. On a finalement le cycle $a \to b \to c \to a$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : On a deux cycles possibles :

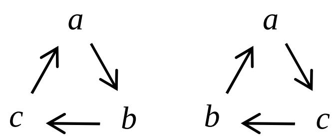

Figure 3. Cycles et vainqueurs de Condorcet

Dans les deux cas, il est évident qu'il n'y a pas de vainqueur de Condorcet.

On s'intéresse maintenant aux conditions sur les préférences des électeurs, pour qu'il existe un vainqueur de Condorcet. Nous citons ici Boursin (1995, pp. 73-75) :

« On utilise des notations telles que $n(ab)$ pour désigner le nombre d'électeurs classant a devant b, et $n(abc)$ pour le nombre d'électeurs ayant pour ordre de classement a, puis b, puis c. On cherche quelles relations doivent vérifier ces nombres pour qu'un cycle apparaisse (et donc pour qu'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet). Les cycles possibles sont : $a \to b \to c \to a$ ou $c \to b \to a \to c$.

Le premier cycle apparaît si :

$$n(ab) > n(ba),\ n(bc) > n(cb) \text{ et } n(ca) > n(ac)$$

et le second si les inégalités opposées sont vérifiées.

Examinons la première de ces inégalités. En observant que :

$$n(ab) = n(abc) + n(acb) + n(cab)$$
$$n(ba) = n(bac) + n(bca) + n(cba)$$

on voit que la première inégalité s'écrit :

$$n(abc) + n(acb) + n(cab) > n(bac) + n(bca) + n(cba).$$

En procédant de façon analogue, on transforme la deuxième et la troisième respectivement en :

$$n(abc) + n(bac) + n(bca) > n(acb) + n(cab) + n(cba)$$
$$n(bca) + n(cab) + n(cba) > n(abc) + n(acb) + n(bac)$$

Ajoutons membres à membres, d'une part les deux premières inégalités, d'autre part la première et la dernière, et enfin les deux dernières. On obtient :

$$n(abc) > n(cba)$$
$$n(cab) > n(bac)$$
$$n(bca) > n(acb)$$

Nous avons donc montré que, s'il y a un cycle, ces trois inégalités (ou les trois inégalités opposées) sont vérifiées. Un des cas dans lesquels ces trois inégalités ne peuvent à l'évidence être satisfaites est celui où l'un des nombre

$$n(abc),\ n(cab) \text{ ou } n(bca)$$

est nul. On s'assure que les trois inégalités opposées sont aussi exclues en supposant que l'un des trois nombres

$$n(cba),\ n(bac) \text{ ou } n(acb)$$

est nul.

Deux conditions à vérifier, chacune comportant trois possibilités : voilà déjà neuf cas dans lesquels on est assuré qu'un cycle est impossible. Ce qui est intéressant, c'est que chacun de ces neuf cas a une interprétation politique simple. Par exemple, le cas

$$n(abc) = 0 \text{ et } n(bac) = 0$$

exprime que l'unanimité s'accorde pour ne pas classer c en dernier.

Dressons un tableau donnant les interprétations des neuf cas mis en évidence :

	$n(abc) = 0$	$n(bca) = 0$	$n(cab) = 0$
$n(acb) = 0$	a n'est pas en tête	c n'est pas médian	b n'est pas dernier
$n(bac) = 0$	c n'est pas dernier	b n'est pas en tête	a n'est pas médian
$n(cba) = 0$	b n'est pas médian	a n'est pas dernier	c n'est pas en tête

Tableau 3. Interprétation des conditions d'absence de cycle

Ce tableau met en évidence une idée simple : s'il y a un certain accord entre les électeurs, on peut éviter l'apparition de cycles. » Boursin (1995, pp. 73-75)

Il est des situations où ces restrictions sur les préférences apparaissent comme naturelles. Supposons qu'un conseil municipal vote le budget à allouer pour l'aménagement d'un terrain municipal en stade de foot. Les montants envisagés sont :

$$a = 10000\ €,\ b = 20000\ € \text{ et } c = 30000\ €.$$

Vu la nature du problème, il semble naturel que personne dans le conseil municipal ne classera b en dernier. En effet, trois attitudes sont possibles parmi les membres du conseil :

- le foot est sa priorité absolue : $c > b > a$;
- le foot ne fait pas partie de ses priorités : $a > b > c$;
- une attitude intermédiaire : $b > a > c$ ou $b > c > a$.

Par contre, les ordres :

$$a > c > b \text{ et } c > a > b$$

sont illogiques.

On peut traduire cette situation sous forme graphique. On porte, en abscisses, les montants envisagés et, en ordonnées, le rang dans les préférences individuelles (l'échelle des ordonnées n'a pas de signification ; ordinale).

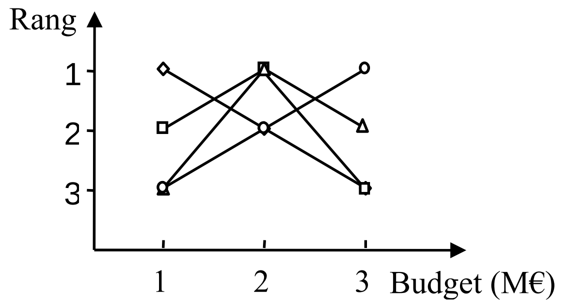

Figure 1. Préférences unimodales

On voit que les ordres retenus sont représentés pas des courbes présentant un seul maximum, dites aussi courbes unimodales.

Cette restriction sur les préférences est intéressante à deux titres :

1) elle paraît ici naturelle et donc, ne constitue pas une limite à la liberté d'opinion et d'expression ;

2) en utilisant le tableau précédent, cette restriction correspond à un des neuf cas où un cycle ne peut exister et où il existe un vainqueur de Condorcet (*b* n'est pas dernier, case en haut à droite).

Ce type de situation se présentera chaque fois que les motions/candidats pourront être ordonnés sur un axe, sur lequel chaque électeur à un point préféré et sa préférence décroît à mesure que l'on s'en éloigne, dans un sens ou dans l'autre. Voici une liste d'exemples :

- le budget alloué à un poste donné ;
- les candidats à l'élection présidentielle sur un axe G-D.

Ces situations ont en commun d'être unidimensionnelles et de n'impliquer aucune restriction autre que naturelle dans l'opinion des électeurs. L'unidimensionalité n'explique pas tout (qu'on pense au choix de la couleur de la peinture pour repeindre l'école du village), mais participe fortement à la propriété. Pour le comprendre, il suffit d'imaginer que le vote précédent porte à la fois sur le budget pour aménager le terrain, mais aussi de son affectation au foot, au tennis ou à une piscine. Dans ce cas, la propriété permettant d'éviter l'existence de cycles peut encore être vérifiée, mais cela impose une restriction sur les préférences beaucoup plus forte.

Après ce préalable, nous pouvons énoncer le théorème de l'électeur médian, que l'on doit à Black (1948). Pour cela, nous considérons une liste $a_1, \ldots, a_p$ de candidats, un ensemble

d'électeurs en nombre n impair, capables de classer les candidats suivants un ordre de préférence (on n'exclut pas ici les cas d'indifférence).
L'hypothèse forte qui permet d'obtenir le théorème est qu'il existe une permutation des candidats rendant les préférences des votants unimodales (à un seul sommet). Pour simplifier les notations, on suppose que c'est l'ordre initial des candidats (en toute généralité). L'état de l'opinion vérifie, pour ce rangement des candidats :

- chaque votant a un candidat qu'il préfère strictement ;
- chaque votant préfère un candidat plus proche de son candidat favori à un candidat plus éloigné (au sens de l'ordre $a_1, \ldots, a_p$).

Formellement, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $q(i) \in \{1, \ldots, p\}$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$:

- si $j \neq q(i)$, $a_{q(i)} > a_j$;
- si $j < q(i)$, $a_j \leq a_{j+1}$;
- si $j > q(j)$, $a_j \geq a_{j+1}$.

Remarque : ces trois propositions se lisent comme suit :

- si $j \neq q(i)$, l'électeur i préfère strictement le candidat $a_{q(i)}$ au candidat a_j ;
- les préférences de i augmente à gauche de $q(i)$ et diminue à droite de $q(i)$.

Supposons que l'on ordonne les votants de telle manière que $q(1) \leq q(2) \leq \ldots \leq q(n)$.
Si n est impair, c'est-à-dire s'écrit $n = 2k + 1$, $k \in$ IN, le candidat préféré de l'électeur $k + 1$, $a_{q(k+1)}$, partage la population des votants en deux sous-ensembles de même cardinal : les électeurs dont l'indice est compris entre 1 et k préfèrent un candidat à gauche de $a_{q(k+1)}$; les électeurs dont l'indice est compris entre $k + 2$ et $2k + 1$ préfèrent un candidat à droite de $a_{q(k+1)}$. On note a_m le candidat soutenu par l'électeur médian $k + 1$.
On montre directement que le candidat soutenu par l'électeur médian l'emporte à la majorité simple contre n'importe quel candidat (précisément, ne peut pas perdre). En effet, soit a un candidat opposé à a_m. Si a est à gauche de a_m, tous les électeurs $i \geq k + 1$ préfèrent a_m à a (strictement dans le cas de $k + 1$ au moins) et réunissent une majorité. Si a est à droite de a_m, on conclut de la même façon.
Si n est pair, on suppose que le président a une voix prépondérante. Alors, on montre que si le président soutient le candidat préféré de l'électeur k plutôt que celui de $k + 1$, ce candidat l'emporte à la majorité simple contre tout autre, et inversement.

On peut maintenant énoncer le :

Théorème : de l'électeur médian (Black, 1948)

Si les préférences sont unimodales, la médiane de la série des candidats préférés par les électeurs l'emporte dans un duel contre tout autre candidat.

2) La règle de Borda et autres alternatives à la majorité simple

i) *Définition de quelques alternatives à la majorité simple et exemples*

Le décompte de Borda : Chaque votant inscrit sur son bulletin son classement des candidats en lice. Au moment du dépouillement, on attribue aux candidats, 1 point à chaque fois qu'il est classé dernier, 2 à chaque fois qu'il est classé avant-dernier, et ainsi de suite. Le classement final des candidats résulte du décompte des points obtenus.

Le système de Hare : Chaque électeur déclare son candidat favori. Celui qui apparaît le moins souvent est retiré des listes. La procédure est répétée jusqu'à ce qu'il reste un seul candidat.

Le système de Coombs : Chaque votant déclare son moins bon candidat. Celui qui apparaît le plus souvent est retiré des listes. On répète la procédure jusqu'à ce qu'il reste un seul candidat.

La méthode des duels : Chaque votant inscrit sur son bulletin son classement. Au dépouillement, on attribue 1 point à un candidat pour chaque candidat classé derrière lui et on lui retire 1 point pour chaque candidat placé devant lui. Le candidat élu est celui qui obtient le plus de point.

Remarque :

- Chacune de ces méthodes requiert que les votants déclarent leur classement complet. Dans le cas de Hare et Coombs, l'ordre complet est dévoilé séquentiellement, pour calculer de proche en proche les nombres de bulletins, après élimination des candidats, classant les candidats respectivement premiers et derniers ;
- La méthode des duels est équivalente au décompte de Borda.

Pour illustrer ces différentes règles, on utilise l'exemple :

1	*b a c d*
2	*d c a b*
3	*a c b d*
4	*b c a d*
5	*d a c b*

Tableau 4. Application des définitions.

On présente le décompte de Borda sous la forme d'un tableau :

Option	Nombre de 1er, 2d, 3ème et 4ème rangs	Scores
a	1, 2, 2, 0	14
b	2, 0, 1, 2	12
c	0, 3, 2, 0	13
d	2, 0, 0, 3	11

Tableau 5. Décompte de Borda.

Exemple de calcul, score de *a* : 1x4 + 2x3 + 2x2 + 0x1 = 14.

D'où il vient le classement social : $a > c > b > d$.

La procédure de Hare élimine d'abord *c*, qui n'est jamais premier ; l'éviction de *c* ne modifiant pas la première ligne du tableau, elle élimine ensuite *a*, qui n'apparaît qu'une fois. Le tableau est alors modifié, sachant qu'il reste seulement *b* et *d* :

1	*b d*
2	*d b*
3	*b d*
4	*b d*
5	*d b*

Finalement, *d* est éliminé face à *b*, qui est élu. Finalement, la règle de Hare produit le classement social : $b > d > a > c$.

La procédure de Coombs élimine d'abord *d*, qui est trois fois dernier. La dernière colonne du tableau devient : *c*, *b*, *b*, *a*, *b*. Ceci fait que *b* est supprimé des listes au second tour. Le tableau est alors modifié, sachant qu'il reste *a* et *c* :

1	*a c*
2	*c a*
3	*a c*
4	*c a*
5	*a c*

Il reste en dernière ligne : *c*, *a*, *c*, *a*, *c*. Finalement, *c* est éliminé, car il est trois fois dernier, contre deux fois pour *a*, qui est élu. Le classement social résultant de la règle de Coombs est ainsi : $a > c > b > d$.

Pour la méthode des duels, les décomptes sont les suivants :

$$a : (2 - 1) + (1 - 2) + (3 - 0) + (1 - 2) + (2 - 1) = 3$$
$$b : (3 - 0) + (0 - 3) + (0 - 3) + (3 - 0) + (0 - 3) = -3$$
$$c : (1 - 2) + (2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 2) = 1$$
$$d : (0 - 3) + (3 - 0) + (1 - 2) + (0 - 3) + (3 - 0) = -1$$

et la méthode des duels produit le classement social : $a > c > b > d$.

ii) *Propriétés de la règle de Borda*

La méthode de Borda vérifie les propriétés suivantes.

Propriétés :

La méthode de Borda vérifie les propriétés :

1) propriété de Bentham : le décompte de Borda est faisable pour n'importe quel profil de classements déclarés par les électeurs et détermine un ordre social (partiel) correspondant. Par conséquent, chaque votant est libre d'opinion et d'expression ;

2) elle est anonyme : si l'on permute les valeurs des bulletins de deux électeurs quelconques, l'ordre déterminé n'est pas modifié. Donc, aucun votant n'est favorisé par cette procédure ;

3) elle est neutre : si l'on échange les noms (les pseudonymes, les codes, …) de deux candidats dans les bulletins, ils se trouveraient simplement échangés dans le classement final ;

4) elle est monotone : si un candidat progresse dans l'opinion, il progresse également dans le classement général ;

5) elle est ordonnante : le résultat du dépouillement est un classement des candidats.

On se souvient que les quatre premières propriétés définissaient, dans la situation où il y a deux candidats, la règle à la majorité simple ; autrement dit, aucune autre règle ne remplissait ces conditions. Le décompte de Borda est donc équivalent à la majorité simple, lorsqu'il s'agit de classer deux candidats seulement. Et pour un nombre quelconque de candidats, c'est un exemple *parmi d'autres* des règles de choix collectifs vérifiant les quatre premières propriétés.

On se souvient également que, dans la situation où il n'y a que deux candidats, la règle à la majorité simple est non manipulable, du fait qu'elle est monotone. Ce n'est pas le cas du décompte de Borda, comme on le montre avec l'exemple suivant :

1	a b (d) c
2	b (d) c a
3	c a b (d)
4	c b (d) a

Tableau 5. La règle de Borda est manipulable.

Supposons que les votants annoncent sincèrement leur classement. Alors les scores des quatre candidats sont :

Option	Nombre de 1er, 2d, 3ème et 4ème rangs	Scores

a	1, 1, 0, 2	9
b	1, 2, 1, 0	12
c	2, 0, 1, 1	11
d	0, 1, 2, 1	8

Tableau 5. Décompte de Borda.

et le candidat *b* est choisi.

Supposons maintenant que le votant 4 inscrive sur son bulletin le classement :

c (*d*) *a* *b*

Alors, les décomptes de Borda sont (*c* est inchangé, *a* gagne 1 point, *d* gagne 1 point et *b* en perd 2) :

a : 10 points, *b* : 10 points, *c* : 11 points, *d* : 9 points,

et le candidat *c* remporte l'élection. Or, l'électeur 4 préfère *c* à *b*, qui aurait été élu s'il n'avait pas modifié son bulletin.

Cette exemple montre que la monotonie ne suffit pas à rendre la méthode de Borda non manipulable. En fait, comme le décompte de Borda est monotone, les votants gagnent toujours à placer leur candidat favori en tête de classement ; mais, ils peuvent tirer avantage à manipuler leur classement des autres candidats, de manière à faire barrière à un candidat dangereux pour leur candidat favori.

Ce défaut est intimement lié au fait que la méthode de Borda ne vérifie pas la propriété suivante :

Définition : Indépendance par rapport aux issues extérieures

Une règle de choix collectif vérifie la propriété d'indépendance par rapport aux issues extérieures (notée IIE) si elle classe toute paire d'issues *x* et *y* quelconque, en fonction de leur classement relatif dans les ordres de préférence individuels seulement. Autrement dit, si deux profils d'opinions sont tels que tous les votants classent *x* et *y* l'un par rapport à l'autre de la même façon et diffèrent par ailleurs, la méthode de choix social doit classer *x* et *y* de la même façon dans les deux cas.

En reprenant l'exemple précédent, on vérifie que le décompte de Borda viole cette condition. En retirant l'issue (*d*) du tableau, le décompte de Borda donne :

Option	Nombre de 1er, 2d, 3ème et 4ème rangs	Scores
a	1, 1, 2	7
b	1, 2, 1	8
c	2, 1, 1	9

Tableau 5. Décompte de Borda.

et élit c. Donc, deux profils d'opinions classant les issues a, b et c de la même façon, et différant seulement par la présence d'une issue extérieure d, donnent les classements

$$b > c > a$$

et

$$c > b > a.$$

Un autre défaut de la règle de Borda est qu'elle n'élit pas toujours un vainqueur de Condorcet lorsqu'il en existe un. Considérons les opinions suivantes :

Nbre de votants	Classement
3 votants	$a\ b\ c$
2 votants	$b\ c\ a$

Tableau. Un premier paradoxe.

Le décompte de Borda donne

$$a : 9 + 2 = 11,\ b : 6 + 6 = 12,\ c : 4 + 3 = 7,$$

et élit b. Pourtant, a bat b et c avec trois voix contre deux à la majorité simple (a est donc vainqueur de Condorcet).

On note avec cet exemple que la méthode imaginée par Borda, en ne sélectionnant pas le vainqueur de Condorcet, évite une situation de tyrannie de la majorité : le candidat élu apparaît comme plus « tempéré » pour cet état de l'opinion que le candidat a.

D'autre part, on peut montrer que la règle de Borda ne classe jamais dernier un vainqueur de Condorcet.