Chapitre I

# Les biens publics

## 1) Définitions

La théorie de l'équilibre général étudie la production et l'échange de biens dits privés. Un bien est privé s'il possède les propriétés :

- il est rival : la quantité consommée par un consommateur réduit d'autant la quantité disponible pour les autres consommateurs ;

- il est à exclusion d'usage : il est possible d'exclure n'importe quel consommateur de sa consommation ; corollairement, il est possible de conditionner la consommation du bien à un péage.

*Définition* :

Un bien est dit *collectif* s'il ne possède pas toutes les propriétés d'un bien privé.

Le tableau 2 propose une typologie classique des biens en quatre types :

| | Avec exclusion d'usage | Sans exclusion d'usage |
|---|---|---|
| Rival | Biens privés<br>ex. : pomme | Biens communaux<br>ex. : pâturages |
| Non rival | Biens de club<br>ex. : TV cryptée | Biens public<br>ex. : déf. nationale |

Tableau 2. Typologie des biens collectifs

## 2) Fourniture optimale d'un bien public

Considérons un bien public produit en quantité $z$. Puisqu'il est non rival, tous les consommateurs peuvent bénéficier de la consommation du bien en quantité $z$ ; et puisqu'il est sans exclusion d'usage, il est impossible de les en empêcher. On en déduit la propriété suivante.

*Propriété* :

Si un bien public est produit en quantité $z$, chaque consommateur $i$ consomme $z$ unités de ce bien : $z_1 = \ldots = z_I = z$.

On s'intéresse aux propriétés d'un état économique optimal au sens de Pareto. L'état économique $E^0$ est optimal s'il est possible et s'il maximise l'utilité d'un consommateur donné, par exemple le consommateur 1, sous la contrainte que les autres consommateurs aient une utilité au moins égale à celle qu'ils obtiennent en l'état $E^0$.

Pour toute la suite du chapitre, on considère un modèle simplifié, dans lequel le nombre de bien est $n = 2$. Le bien 1 est un bien privé. Le bien 2 est un bien public.
On note :

$w_i$ = dotation initiale du consommateur $i$ en bien privé,

$x_i$ = quantité de bien privé consommée par le consommateur $i$,

$y_j$ = quantité de bien privé produite par le producteur $j$,

$z_j$ = quantité de bien public produite par le producteur $j$,

$z = \Sigma_j z_j$ = quantité de bien public consommée par les consommateurs.

A ces restrictions et notations près, le modèle est le même que celui rappelé dans le chapitre introductif. La fonction d'utilité du consommateur $i$ s'écrit $U^i(x_i, z)$. La fonction de transformation du producteur $j$ s'écrit $f^j(y_j, z_j)$.

*Proposition* : Condition de Bowen-Lindhal-Samuelson (BLS)

Si l'état économique $E^0$ (défini par les quantités $x_i^0$, pour tout $i$, $y_j^0$ et $z_j^0$, pour tout $j$) est optimal au sens de Pareto, alors il vérifie les conditions :

$$\Sigma_i \text{TMS}^i_{x,z} = \Sigma_i U_2^i/U_1^i = \text{TMT}^j_{y,z} = f_2^j/f_1^j, \text{ pour tout } j.$$

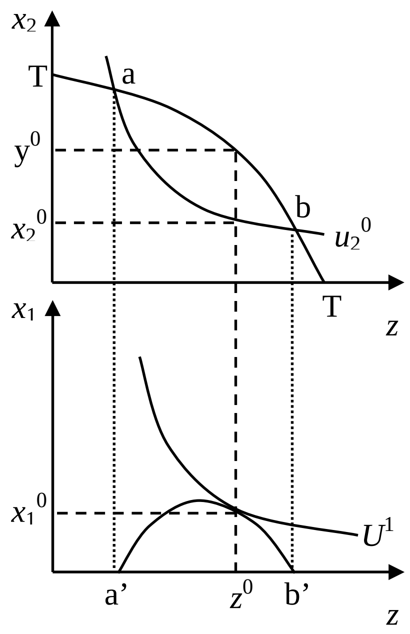
On rappelle au passage qu'un état économique est possible s'il satisfait les conditions : $f^j(y_j^0, z_j^0) = 0$, pour tout $j$, $\Sigma_i x_i = \Sigma_i y_j + \Sigma_i w_i$ et $z = \Sigma_j z_j$.

Pour démontrer ce résultat, on pose le Lagrangien du problème, consistant à maximiser $U^1(x_1, z)$, sous les contraintes : $U^i(x_i, z) \geq U^i(x_i^0, z^0) = u_i^0$ (pour $i = 2, \ldots, I$), $f^j(y_j, z_j) \leq 0$ (pour $j = 1, \ldots, J$) et l'état est possible ($\Sigma_i x_i = \Sigma_j y_j + \Sigma_i w_i$ et $z = \Sigma_j z_j$). Notons $a_i$, $b_j$, $c$ et $d$ les multiplicateurs de Lagrange associés aux différentes contraintes. En posant $a_1 = 1$, on écrit le lagrangien :

$$L = \Sigma_i a_i (U^i(x_i, z) - u_i^0) - \Sigma_j b_j f^j(y_j, z_j) - c (\Sigma_i x_i - \Sigma_j y_j - \Sigma_i w_i) - d (z - \Sigma_j z_j)$$

Une solution optimale du problème annule toutes les dérivées premières du Lagrangien, desquelles on tire la condition BLS.

Samuelson (1955) illustre ce résultat à l'aide de la figure en deux parties suivante. Par hypothèse, il y a deux consommateurs et le problème est de savoir quelles quantités produire du bien privé et du bien public, étant données les préférences des deux consommateurs et la technologie des entreprises.




Sur la figure du dessus, on représente l’ensemble des possibilités de production de l’économie, sous la frontière TT, et la courbe d’indifférence du consommateur 2, associée à un niveau d’utilité $u_2^0$ donné (on suppose qu’il est accessible, i.e. que la courbe d’indifférence rencontre la frontière TT en deux points, notés a et b sur la figure).
Sur la figure du dessous, on construit l’ensemble des possibilités de consommation du consommateur 1 et son optimum, de la façon suivante. Pour chaque quantité de bien public $z$, on détermine la quantité du bien privé restant au consommateur 1, une fois que l’individu 2 a consommé ce qu’il faut pour avoir une utilité juste égale à $u_2^0$. On construit ainsi l’ensemble des possibilités de consommation du consommateur 1, sous la frontière a’b’. On note que, par construction, la pente de la frontière a’b’ est égale à la différence entre la pente de la frontière des possibilités de production et la pente de la courbe d’indifférence de l’individu 2, soit à $\text{TMT}_{y,z} - \text{TMS}^2_{x,z}$. L’optimum du consommateur 1 s’obtient en un point de tangence de sa courbe d’indifférence la plus élevée avec cet ensemble (en posant les conditions de convexité nécessaires). On vérifie bien la condition BLS en ce point :

$$\text{TMS}^1_{x,z} = \text{TMT}_{y,z} - \text{TMS}^2_{x,z} \Leftrightarrow \text{TMS}^1_{x,z} + \text{TMS}^2_{x,z} = \text{TMT}_{y,z}.$$

**Exercice 1** : Bien public et fonction d’utilité quasi-linéaire.
Considérons une économie comportant un bien privé, un bien public, deux consommateurs $i = 1, 2$ et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$U^1(x_1, z) = x_1 + v_1 (1 - z)\, z,$$
$$U^2(x_2, z) = x_2 + v_2 (1 - z)\, z,$$
$$w_1 = w_2 = 1/2.$$
$$f(y, z) = y + c\, z.$$

Déterminer les états optimaux de cette économie.

**Exercice 2** : Bien public et fonction d'utilité Cobb-Douglas.
Même question que dans l'exercice précédent en utilisant la spécification suivante :

$$U^1(x_1, z) = \ln(x_1) + v_1 \ln(z),$$
$$U^2(x_2, z) = \ln(x_2) + v_2 \ln(z),$$
$$w_1 = w_2 = 1/2.$$
$$f(y, z) = y + c\, z.$$

## 3) Décentralisation de l'état optimal

### i) *L'échec du marché*

Un marché risque d'échouer à décentraliser un état optimal (comme défini ci-dessus), du fait des propriétés mêmes du bien public.
Il découle de la propriété de non exclusion d'usage qu'un péage pour la consommation du bien public ne peut être que libre et volontaire. Par ailleurs, du fait de la propriété de non rivalité, chaque consommateur sait qu'il bénéficie de la consommation du bien public, même s'il ne contribue pas à son financement. Il a donc intérêt à se comporter en *passager clandestin*, c'est-à-dire à refuser de participer au financement, en espérant une participation généreuse des autres. Ainsi, faute d'une demande solvable, le marché offrira le bien public en quantité insuffisante, voire pas du tout.
De plus, même en supposant que le bien public soit à exclusion d'usage et que, donc, un prix puisse être imposé aux consommateurs, il découle de la propriété de non rivalité que le prix d'un bien non rival n'informe pas correctement le marché sur la demande. En effet, il exprime (au mieux) la valeur moyenne du bien public pour les consommateurs, alors que sa valeur sociale est la somme des valeurs individuelles.

### ii) *Pseudo-équilibre de marché*

Lindhal (1919) et Samuelson (1969) veulent construire une organisation capable de décentraliser tout état optimal, en présence d'un bien public. Formellement, leur solution revient à créer un marché du bien public différent pour chaque consommateur. A l'équilibre, les prix d'équilibre sur ces marchés pourront différer ; si bien que les consommateurs payeront des prix **personnalisés** pour le bien public. Les entreprises récupèrent quant à elles un prix, pour chaque unité offerte, égal à la somme des prix personnalisés payés par les consommateurs sur cette unité.

On considère à nouveau le modèle simplifié précédent. On suppose en outre que le bien privé est numéraire (son prix est égal à 1).
On note :

$$p_1, \ldots, p_I = \text{prix personnalisés sur les marchés du bien public.}$$

*Définition* : Pseudo-équilibre de marché de Lindhal-Samuelson

Un pseudo-équilibre de marché de Lindhal-Samuelson est la donnée d'un état économique $E^*$ (défini par les quantités $x_i^*$, pour tout $i$, $y_j^*$ et $z_j^*$, pour tout $j$, et $z^*$), de $I$ prix personnalisés $p_1^*, \ldots, p_I^*$ et d'un prix agrégé $p^* = \Sigma_i\, p_i^*$ pour le bien public, tels que :

1) les quantités $x_i^*$ et $z^*$ maximisent l'utilité $U^i(x_i, z)$ du consommateur $i$, sous sa contrainte de budget $x_i + p_i^*\, z \leq R_i$ (avec $R_i = \Sigma_i\, \theta_{ij}\, \pi_j + w_i$) ;

2) les quantités $y_j^*$ et $z_j^*$ maximisent le profit $\pi_j = y_j + p^*\, z_j$ de l'entreprise $j$, sous sa contrainte technologique $f^j(y_j, z_j) \leq 0$ ;

3) chaque marché est équilibré : $\Sigma_i\, x_i^* = \Sigma_j\, y_j^* + \Sigma_i\, w_i$ et $z^* = \Sigma_j\, z_j^*$.

Dans cette définition, il convient de bien comprendre que, sur chaque marché personnalisé du bien public, le consommateur $i$ paye $p_i$ sur chaque unité qu'il demande et est supposé demander la quantité $z$ qui maximise son utilité, sous sa contrainte de budget. Le marché est considéré comme équilibré quand, pour le prix $p_i^*$, le consommateur $i$ demande une quantité $z^*$, égale à l'offre totale de bien public par l'ensemble des entreprises (i.e., $\Sigma_j\, z_j^*$), et ceci pour tous les consommateurs. Les quantités offertes $z_j^*$ par les entreprises sont choisies pour maximiser leur profit.

*Propriété* : Un pseudo-équilibre de marché de Lindhal-Samuelson vérifie les propriétés :

1) chaque consommateur sature sa contrainte de budget et égalise son taux marginal de substitution du bien privé au bien public au prix personnalisé du dernier :

$$x_i^* + p_i^*\, z^* = R_i \text{ et } \mathrm{TMS}^i_{x,\,z} = U_2^i/U_1^i = p_i^* \text{ et pour tout } i\ ;$$

2) chaque entreprise sature sa contrainte technologique et égalise son taux marginal de transformation du bien privé en bien public au prix du dernier :

$$f^j(y_j^*, z_j^*) = 0 \text{ et } \mathrm{TMT}^j_{y,\,z} = f_z^j/f_1^j = p^*, \text{ pour tout } j.$$

Ces propriétés dérivent directement des problèmes d'optimisation de chaque agent, en écrivant les Lagrangiens de chaque problème et en annulant les dérivées premières. A partir de ces propriétés, on peut démontrer la proposition suivante.

*Proposition* : Correspondance entre les états optimaux et les pseudo-équilibres de marché.

Tout pseudo-équilibre général de Lindhal-Samuelson vérifie la condition BLS et est un état optimal.

Réciproquement, sous l'hypothèse de convexité des préférences et des technologies, tout état optimal peut être obtenu comme pseudo-équilibre général de Lindhal-Samuelson.

Sur la portée pratique de la notion de pseudo-équilibre de Lindhal-Samuelson, on doit faire un certain nombre de commentaires. L'optimalité de cette solution repose sur l'hypothèse selon laquelle chaque consommateur demande la quantité de bien public qui maximise son utilité, en fonction de son budget et de son prix personnalisé. Un tel comportement paraît peu vraisemblable. Le consommateur se comporterait de cette façon s'il croyait réellement que toute unité qu'il manquerait de demander lui serait effectivement confisquée. Or il n'en est rien, puisque le bien est public (il n'y a pas exclusion d'usage). Dans le même ordre idée, le consommateur est censé considérer son prix personnalisé comme donné, alors qu'il est seul à fixer la demande sur son marché personnalisé. On comprend pourquoi la solution de Lindhal-Samuelson a reçu le qualificatif de « pseudo-équilible » (par Samuelson lui-même).

iii) *Centralisation et planification de la fourniture d'un bien public*

Malinvaud (1971) et Drèze et de la Vallée Poussin (1971) étudient la possibilité d'une organisation centralisée et planifiée de la fourniture et du financement d'un bien public. Ils imaginent un mécanisme permettant à un bureau du plan, par tâtonnement, de décentraliser tout état optimal, sans disposer initialement d'information sur les préférences et les technologies.

En supposant qu'une unique entreprise offre le bien public (hypothèse simplificatrice, maintenue pour toute la suite du chapitre), la procédure qu'ils proposent, dite procédure MDP, est définie par une allocation initiale $E(0) = (x_1(0), \ldots, x_I(0), y(0), z(0))$, supposée possible,et un processus de tâtonnement, telle qu'à chaque instant $t$, pour une allocation $E(t) = (x_1(t), \ldots, x_I(t), y(t), z(t))$ courante donnée :

1) chaque consommateur $i$ évalue son taux marginal de substitution entre le bien privé et le bien public :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = U_2^i/U_1^i\ (x_i(t), z(t))$$

et le transmet au bureau du plan ;

2) l'entreprise évalue son taux marginal de transformation du bien privé en bien public :

$$\mathrm{TMT}_{y,\, z} = f_2/f_1\ (y(t), z(t))$$

et le transmet au bureau du plan ;

3) le bureau du plan modifie l'allocation courante $E(t)$ de la façon suivante :

$$z'(t) = \Sigma_i\ \mathrm{TMS}^i_{x,\, z} - \mathrm{TMT}_{y,\, z},$$

$$x_i'(t) = -\ \mathrm{TMS}^i_{x,\, z}\ z'(t) + \alpha_i\ (z'(t))^2,$$

avec $\alpha_i > 0$ et $\Sigma_i\ \alpha_i = 1$.

La première équation garantit que tout équilibre du système dynamique est un état optimal au sens de Pareto. En effet, à l'équilibre du système, on a :

$$z'(t) = 0 \Rightarrow \Sigma_i\ \mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = \mathrm{TMT}_{y,\, z},$$

et la condition BLS se trouve vérifiée.

La seconde équation garantit que, si l'état initial $E(0)$ est possible, pour tout $t$, les états $E(t)$, obtenus en suivant la procédure MDP, seront possibles. En effet, supposons que l'état courant $E(t)$ soit possible ; donc $f(\Sigma_i\ x_i(t), z(t)) = 0$. En différentiant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(\Sigma_i\ x_i(t), z(t))/\mathrm{dt} &= f_1(y(t), z(t))\ \Sigma_i\ x_i'(t) + f_2(y(t), z(t))\ z'(t) \\ &= f_1(y(t), z(t))\ [\Sigma_i\ x_i'(t) + \mathrm{TMT}_{y,\, z}\ z'(t)] \end{aligned}$$

En utilisant les équations de la procédure MDP, on a $\Sigma_i\, x_i'(t) = -\Sigma_i\, \mathrm{TMS}^i_{x,\,z}\, z'(t) + (z'(t))^2$ et $z'(t) = \Sigma_i\, \mathrm{TMS}^i_{x,\,z} - \mathrm{TMT}_{y,\,z}$. Il s'ensuit que $\mathrm{d}f(\Sigma_i\, x_i(t), z(t))/\mathrm{dt} = 0$. Ainsi, on a $f(\Sigma_i\, x_i(t), z(t)) = 0$ à toutes les dates futures.

La seconde équation implique aussi que l'utilité des consommateurs croît au cours du déroulement du processus. En effet, la variation de l'utilité du consommateur est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U^i(x_i(t), z(t))/\mathrm{d}t &= U_1^i(x_i(t), z(t))\, x_i'(t) + U_2^i(x_i(t), z(t))\, z'(t)\\ &= U_1^i(x_i(t), z(t))\, [x_i'(t) + \mathrm{TMS}^i_{x,\,z}\, z'(t)]\\ &= U_1^i(x_i(t), z(t))\ \alpha_i\, (z'(t))^2 > 0\end{aligned}$$

On peut en déduire que le système converge vers un équilibre du système dynamique, du fait que l'utilité est bornée dans l'ensemble des états économiques possibles. En fin de compte, la procédure MDP décentralise un état optimal $E^0$.

**Exercice 3** : Procédure MDP

Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, \ldots, I$ et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$U^i(x_i, z) = x_i + v_i\, (1 - z/2)\, z, \text{ pour tout } i,$$

$$f(y, z) = y + c\, z.$$

On note $V = \Sigma_i\, v_i$.

a) Déterminer le taux marginal de substitution entre le bien privé et le bien public du consommateur $i$.

b) Déterminer le taux marginal de transformation du bien privé en bien public de l'entreprise.

c) Déterminer l'état optimal $z^0$ de l'économie.

d) Ecrire les équations de la procédure MDP.

e) Montrer que $z(t) = [z(0) - z^0]\, \mathrm{e}^{-Vt} + z^0$, où $z(0)$ est l'état initial du plan et où on pose $z^0 = 1 - c/V$, est solution de la première équation.

f) Montrer que $z(t)$ tend vers $z^0$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

iv) *Fourniture d'un bien public par souscription*

Considérons le mécanisme suivant. Les consommateurs souscrivent volontairement une somme $t_i$ pour financer le bien public. Pour une souscription agrégée égale à $T = \Sigma_i\, t_i$, on suppose que l'offre de bien public est la quantité maximale qui peut être produite en contrepartie du paiement de $T$.

Supposons qu'il y a une unique entreprise produisant le bien public et en utilisant la fonction de transformation suivante :

$$f(y, z) = y + c\, z,$$

où $c > 0$ donne le coût d'une unité de bien public (mesuré en unités de bien privé). L'offre de bien public correspondant à une souscription totale d'un montant $T$ vérifie :

$$f(-T, z) = 0 \Leftrightarrow z = T/c.$$

Ainsi, pour chaque unité souscrite, l'entreprise produit $1/c$ unités du bien public.

Sous la conjecture de Nash, chaque consommateur $i$ souscrit $t_i$ pour maximiser $U^i(x_i, z)$, sous les contraintes $x_i + t_i = w_i$ et $z = T/c$, en considérant les souscriptions des autres comme données. En substituant, le problème se ramène au choix de $t_i$ pour maximiser :

$$U^i(w_i - t_i, \Sigma_i\, t_i/c).$$

Un équilibre de Nash ($t_1$*, …, $t_I$*) de ce jeu de souscription vérifie, pour tout $i$ :

$$\mathrm{d}U^i(w_i - t_i, \Sigma_i\, t_i/c)/\mathrm{d}t_i = 0,$$

soit :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = U_2^i/U_1^i\ (x_i^*, z^*) = c = \mathrm{TMT}_{y,\, z},$$

en posant $x_i^* = w_i - t_i^*$ et $z^* = \Sigma_i\, t_i^*/c$.

*Remarque* : On a :

$$\mathrm{d}U^i(w_i - t_i, \Sigma_i\, t_i/c)/\mathrm{d}t_i = - U_1^i(w_i - t_i^*, \Sigma_i\, t_i^*/c) + (1/c)\, U_2^i(w_i - t_i^*, \Sigma_i\, t_i^*/c) = 0.$$

On conclut qu'un équilibre de Nash du jeu de souscription ne respecte pas la condition de BLS. Autrement dit, ce mécanisme de financement d'un bien public ne décentralise pas un état optimal. La raison est que chaque consommateur souscrit trop peu, du fait que seuls les avantages qu'il retire personnellement de sa souscription lui importent. Il néglige donc de prendre en compte les avantages des autres.

**Exercice 4** : Mécanisme de souscription
Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, …, I$ et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$w_i = 1 \text{ et } U^i(x_i, z) = \ln(x_i) + \ln(z), \text{ pour tout } i,$$
$$f(y, z) = y + z.$$

a) Calculer l'équilibre de Nash du jeu de souscription.
b) Comparer avec l'état optimal de l'économie.

v) *Le vote*

Envisageons finalement la situation où la quantité produite du bien public est soumise au vote à la majorité simple. Pour simplifier, on suppose que les consommateurs conviennent par avance d'une contribution égale de chacun, permettant de financer le coût de production du bien public.
Ainsi, en restant dans l'hypothèse précédente, si le programme élu prévoit la production de $z$ unités du bien public, le coût de la production de $z$ unités est $c\, z$ et chacun doit contribuer $(c\, z)/n$. Alors, l'utilité du consommateur $i$ est donnée par :

$$U^i(w_i - c\, z/n, z).$$

En supposant que les fonctions d'utilité sont concaves, cette expression est elle-même une fonction concave. Il s'ensuit que les préférences des consommateurs sont unimodales et qu'on peut utiliser le théorème de l'électeur médian (cf. Chap. IV) : dans un vote à la majorité simple, le programme préféré de l'électeur médian l'emporte sur n'importe quel programme alternatif.

Notons $z_i$* le programme préféré du consommateur $i$. Comme il maximise son utilité, il vérifie :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,\,z} = U_2^i/U_1^i\,(w_i - c\,z^i/n,\, z^i) = c/n = (1/n)\,\mathrm{TMT}_{y,\,z}.$$

Notons $m$ l'indice de l'électeur médian. Par définition, en rangeant les électeurs dans l'ordre croissant des quantités $z_i$*, on compte autant d'individus à gauche et à droite de $m$. En vertu du théorème de l'électeur médian, le programme $z_m$* l'emporte à la majorité simple, contre n'importe quel autre programme.

On en déduit que le programme élu vérifie :

$$n\,\mathrm{TMS}^m_{x,\,z} = \mathrm{TMT}_{y,\,z},$$

où $m$ est l'indice de l'électeur médian. Cette condition coïncide avec la condition BLS si, et seulement si, le taux marginal de substitution entre le bien privé et le bien public de l'électeur médian $\mathrm{TMS}^m_{x,\,z}$ est égal à la moyenne des taux marginaux de substitution entre le bien privé et le bien public dans la population, soit $\Sigma_i\,\mathrm{TMS}^i_{x,\,z}/n$. Ceci ne peut être vrai que de façon fortuite. La procédure de vote détermine donc le plus souvent un état sous-optimal. Selon le cas, elle peut conduire à une offre de bien public trop grande ou trop petite.

**Exercice 5** : Vote à la majorité simple
Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, \ldots, I$ et un producteur. On suppose que $I$ est impair. On utilise la spécification suivante :

$$U^i(x_i, z) = x_i + v_i \ln(z), \text{ pour tout } i,$$
$$f(y, z) = y + c\,z.$$

On suppose que $v_1 < v_2 < \ldots < v_I$. On note $V = \Sigma_i\, v_i$.
a) Déterminer le programme préféré de l'électeur médian.
b) Comparer avec l'état optimal de l'économie.

vi) *Problème de la révélation des préférences*

Quel que soit le mécanisme utilisé pour organiser la fourniture du bien public, la difficulté centrale qu'il faut résoudre est celle de la révélation des préférences. Dans le cas du pseudo-équilibre général de Lindhal-Samuelson, Samuelson note (1964) : « Il est dans l'intérêt égoïste de chaque individu de donner un signal faux, de prétendre avoir moins d'intérêt dans la consommation du bien public qu'en réalité. »
Résoudre ce problème revient à déterminer une règle de paiement telle que les individus ont intérêt à annoncer honnêtement leur besoin en matière de bien public. Dans le cas où les individus ont une fonction d'utilité quasi-linéaire (i.e. s'écrivant $U^i(x_i, z) = x_i + b_i(z)$),
le mécanisme de Vickrey-Clarke-Groves (noté VCG ci-dessous) y apporte une solution générale.

Pour simplifier, considérons le cas d'un bien public indivisible, c'est-à-dire qui ne peut être produit qu'en quantité $z = 0$ ou $z = 1$ (pour fixer les esprits, pensons à un pont). Son coût de production est $c$. Les fonctions d'utilité des consommateurs sont supposées de la forme :

$$U^i(x_i, z) = x_i + v_i\, z, \text{ pour tout } i.$$

Le paramètre $v_i$ s'interprète comme la propension à payer de l'individu (si le bien public n'est pas fourni, l'utilité du consommateur est $U^i(w_i, 0) = w_i$ ; s'il paye $v_i$ pour le bien public, son utilité est $U^i(w_i - v_i, 1) = w_i$). Ce paramètre est supposé connu du consommateur $i$ seul ; en particulier, le Planificateur ne le connaît pas. Ceci est problématique pour décentraliser l'état optimal, qui nécessite de produire le bien public si, et seulement si, $\Sigma_i\, v_i \geq c$.

Le mécanisme VCG s'appuie sur un résultat remarquable en théorie des enchères, mis en évidence par Vickrey en 1961.

*Propriété* : Enchères au second prix.

Dans une enchère au second prix, où le commissaire-priseur attribue un bien indivisible au plus fort enchérisseur et lui fait payer un prix égal à la **seconde** enchère la plus élevée, tout enchérisseur rationnel doit annoncer sa véritable propension à payer pour le bien.

Pour le montrer, notons $a_i$ l'enchère d'un enchérisseur $i$ quelconque et $a_{\hat{\imath}}$ l'enchère la plus forte parmi les autres. L'enchère $a_{\hat{\imath}}$ détermine donc le prix que l'enchérisseur $i$ paye s'il remporte l'enchère, i.e. si $a_i > a_{\hat{\imath}}$. On doit montrer que $a_i = v_i$ est une stratégie dominante de l'enchérisseur $i$. En effet :

- si $v_i \geq a_{\hat{\imath}}$, l'enchérisseur $i$ gagne à emporter l'enchère et :
  - enchérir $a_i > v_i$ ne lui sert à rien, car son gain est de toute façon $v_i - a_{\hat{\imath}} \geq 0$ ;
  - enchérir $a_i < v_i$, soit ne change rien (si $a_{\hat{\imath}} < a_i < v_i$), soit lui fait courir le risque de perdre l'enchère ;
- si $v_i < a_{\hat{\imath}}$, l'enchérisseur $i$ perd à emporter l'enchère et :
  - enchérir $a_i > v_i$, soit ne lui sert à rien (si $v_i < a_i < a_{\hat{\imath}}$), soit lui fait courir le risque de remporter l'enchère ;
  - enchérir $a_i < v_i$ ne sert à rien, car il perd l'enchère de toute façon.

Ainsi, dans tous les cas, l'enchère $a_i = v_i$ est la stratégie la plus sure. Par ailleurs, ce résultat est indépendant de $a_{\hat{\imath}}$, ce qui prouve que c'est une stratégie dominante. On dit que le mécanisme d'enchère au second prix est un **révélateur en stratégie dominante** (en l'occurrence, faiblement dominante).

Le trait caractéristique de l'enchère au second prix est que la règle appliquée fait payer à chacun le coût qu'il fait supporter aux autres. Si vous perdez l'enchère, vous ne payez rien ; si vous remportez l'enchère, vous privez le second enchérisseur $\hat{\imath}$ d'un gain égal à $a_{\hat{\imath}}$ (puisque lui aussi déclare honnêtement sa propension à payer pour le bien en enchérissant $a_{\hat{\imath}} = v_i$), qui est donc le prix que vous devez payer pour avoir le bien.

Le mécanisme imaginé par Clarke (1971), dit *mécanisme du pivot*, généralise ce résultat pour les biens publics. De même que dans l'enchère au second prix, chaque consommateur $i$ annonce une propension à payer pour le bien public $a_i$ (honnêtement ou pas ; i.e. $a_i \neq v_i$ est possible) et paye ce que coûte son annonce aux autres, sachant que la règle est que le bien public est produit si, et seulement si, la somme des propensions à payer annoncées est supérieure au coût de fourniture du bien : $\Sigma_i\, a_i \geq c$. Il reste à déterminer ce que coûte l'annonce de $i$. Notons $a_{\hat{\imath}}$ la **somme** des annonces des autres (i.e., $a_{\hat{\imath}} = \Sigma_{j \neq i}\, a_j$) :

- si $a_{\hat{\imath}} \geq c$, on a $a_{\hat{\imath}} + a_i > c$, quelle que soit l'annonce $a_i$ de $i$ : il ne paye rien puisque son annonce est sans effet, le bien public étant toujours fourni ;
- si $a_{\hat{\imath}} < c$, en annonçant une propension à payer $a_i$ suffisamment petite, le consommateur $i$ obtient que le bien ne soit pas produit ; au contraire, en annonçant une propension à payer $a_i$ suffisamment grande, le consommateur $i$ obtient que le bien soit produit. Lorsque l'annonce $a_i$ fait basculer la décision, on dit que l'individu $i$ est *pivot* et, en vertu du principe vu ci-dessus, il doit payer $c - a_{\hat{\imath}}$, pour dédommager les autres d'un coût qu'ils n'auraient pas eu à supporter hors sa présence.

Si on construit un mécanisme autour de ces règles, l'utilité du consommateur $i$ s'écrit :

$$\left|\begin{array}{cl} v_i & \text{si } a_{\hat{\imath}} \geq c \\ v_i - (c - a_{\hat{\imath}}) & \text{si } a_{\hat{\imath}} < c \leq a_{\hat{\imath}} + a_i \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

*Proposition* : Mécanisme du pivot.

Le mécanisme du pivot est révélateur en stratégie dominante.

On doit montrer que $a_i = v_i$ est une stratégie dominante du consommateur $i$ :

- si $a_{\hat{\imath}} \geq c$, l'annonce $a_i$ est indifférente, l'utilité de $i$ étant toujours $v_i$ ;
- si $a_{\hat{\imath}} < c$, le consommateur $i$ doit arbitrer entre les utilités $v_i - (c - a_{\hat{\imath}})$ et 0. Si $v_i \geq (c - a_{\hat{\imath}})$, il a intérêt à annoncer $a_i \geq (c - a_{\hat{\imath}})$, afin que le bien soit fourni ; en particulier, l'annonce $a_i = v_i$ convient. Sinon, il a intérêt à annoncer $a_i < (c - a_{\hat{\imath}})$, pour que le bien ne soit pas produit ; en particulier, l'annonce $a_i = v_i$ convient.

Dans tous les cas, l'annonce $a_i = v_i$ garantit donc une utilité maximale au consommateur $i$. Et cette stratégie est optimale indépendamment de $a_{\hat{\imath}}$. C'est donc une stratégie dominante.

Groves (1973) généralise le mécanisme du pivot et montre que tout mécanisme tel que chaque consommateur $i$ paye $c - a_{\hat{\imath}}$ quand le bien est produit et $h_i(a_{\hat{\imath}})$ en toutes circonstances, est révélateur en stratégie dominante.

En effet, l'utilité s'écrit alors :

$$\left|\begin{array}{ll} v_i - (c - a_{\hat{\imath}}) - h_i & \text{si } a_{\hat{\imath}} + a_i \geq c \\ - h_i & \text{sinon} \end{array}\right.$$

On peut éliminer $h_i$ (puisqu'il est payé en toutes circonstances et ne dépend pas de la valeur de $a_i$), il ne modifie pas les incitations). Alors :

- si $a_{\hat{\imath}} \geq c$, l'annonce $a_i$ est indifférente et, en particulier, $a_i = v_i$ convient ;
- si $a_i < c$, l'individu doit arbitrer entre $v_i - (c - a_{\hat{\imath}})$ et 0. Il a intérêt à annoncer $a_i \geq (c - a_{\hat{\imath}})$ si, et seulement si, $v_i \geq (c - a_{\hat{\imath}})$. Si $v_i \geq (c - a_{\hat{\imath}})$, l'annonce $a_i = v_i$ convient ; si $v_i < (c - a_{\hat{\imath}})$, l'annonce $a_i = v_i$ convient également.

Un défaut commun à tous les mécanismes de ce type est qu'ils ne réalisent pas un équilibre budgétaire. En ce sens, ils ne sont pas pleinement optimaux (en supposant que la fiscalité est distorsive). On dit que les mécanismes VCG sont *satisfaisants*.
D'Aspremont et Gérard-Varet (1979) ont mis au point une autre classe de mécanismes, où l'annonce de la vérité est une stratégie d'équilibre au sens de Nash, et non plus en stratégie dominante, qui permettent d'obtenir l'équilibre budgétaire. L'inconvénient de cette solution est qu'en tant qu'équilibre de Nash, elle nécessite que les joueurs et le Planificateur possèdent une information préalable sur les propensions à payer des autres, et que cette information est connaissance commune.

## 4) Corrigés des exercices

**Exercice 1** : Bien public et fonction d'utilité quasi-linéaire.
Considérons une économie comportant un bien privé, un bien public, deux consommateurs $i$ = 1, 2 et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$U^1(x_1, z) = x_1 + v_1 (1 - z) z,$$
$$U^2(x_2, z) = x_2 + v_2 (1 - z) z,$$
$$w_1 = w_2 = 1/2.$$
$$f(y, z) = y + c z.$$

Déterminer l'état optimal de cette économie.
On note $V = \Sigma_i v_i$.
On a :

$$\text{TMS}^i_{x,z} = U_2^i/U_1^i = v_i (1 - z), \text{ pour tout } i,$$
$$\text{TMT}_{y,z} = f_2/f_1 = c.$$

Un état optimal $E^0$ de l'économie vérifie :

$$\Sigma_i \text{ TMS}^i_{x,z} = V (1 - z^0) = c = \text{TMT}_{y,z},$$
$$f^j(y^0, z^0) = y^0 + c z^0 = 0,$$
$$x_1^0 + x_2^0 = y^0 + 1.$$

Les solutions de ce système sont : $x_1^0 + x_2^0 = c (c/V - 1) + 1$, $y^0 = c (c/V - 1)$ et $z^0 = 1 - c/V$.

Il s’ensuit qu’un état optimal de l’économie est caractérisé par des quantités fixées de biens privé et public. Ceci découle directement des fonctions d’utilité quasi-linéaires. La répartition du bien privé entre les consommateurs est par contre libre.

**Exercice 2** : Bien public et fonction d’utilité Cobb-Douglas.
Même question que dans l’exercice précédent en utilisant la spécification suivante :

$$U^1(x_1, z) = \ln(x_1) + v_1 \ln(z),$$
$$U^2(x_2, z) = \ln(x_2) + v_2 \ln(z),$$
$$w_1 = w_2 = 1/2.$$
$$f(y, z) = y + c\, z.$$

On calcule :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = U_2^i/U_1^i = v_i\, x_i/\mathrm{z}, \text{ pour tout } i,$$
$$\mathrm{TMT}_{y,\, z} = f_2/f_1 = c.$$

Un état optimal $E^0$ de l’économie vérifie :

$$\Sigma_i\, \mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = (v_1\, x_1^0 + v_2\, x_2^0)/z^0 = c = \mathrm{TMT}_{y,\, z},$$
$$f^j(y^0, z^0) = y^0 + c\, z^0 = 0,$$
$$x_1^0 + x_2^0 = y^0 + 1.$$

En prenant $z^0$ comme paramètre, les solutions de ce système sont : $x_1^0 = ((1 + v_1)\, c\, z^0 – v_1)/(v_2 – v_1)$, $x_2^0 = ((1 + v_2)\, c\, z^0 – v_2)/(v_1 – v_2)$, $y^0 = – c\, z^0$.

**Exercice 3** : Procédure MDP
Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, \ldots, I$ et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$U^i(x_i, z) = x_i + v_i\, (1 – z/2)\, z, \text{ pour tout } i,$$
$$f(y, z) = y + c\, z.$$

On note $V = \Sigma_i\, v_i$.
a) Déterminer le taux marginal de substitution entre le bien privé et le bien public du consommateur $i$ :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,\, z} = U_2^i/U_1^i = v_i\, (1 – z).$$

b) Déterminer le taux marginal de transformation du bien privé en bien public de l’entreprise :

$$\mathrm{TMT}_{y,\, z} = f_2/f_1 = c.$$

c) Déterminer l’état optimal $z^0$ de l’économie.
d) Ecrire les équations de la procédure MDP :

$$z'(t) = V\, (1 – z(t)) – c,$$
$$x_i'(t) = – v_i\, (1 – 2\, z(t))\, z'(t) + \alpha_i\, (z'(t))^2,$$

e) Montrer que $z(t) = [z(0) – z^0]\, \mathrm{e}^{–Vt} + z^0$, où $z(0)$ est l’état initial du plan et où on pose $z^0 = 1 – c/V$, est solution de la première équation.
f) Montrer que $z(t)$ tend vers $z^0$ quand $t$ tend vers $+ \infty$.

**Exercice 4** : Mécanisme de souscription

Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, \ldots, I$ et un producteur. On utilise la spécification suivante :

$$w_i = 1 \text{ et } U^i(x_i, z) = \ln(x_i) + \ln(z), \text{ pour tout } i,$$
$$f(y, z) = y + z.$$

a) Calculer l'équilibre de Nash du jeu de souscription.

Si les $I$ consommateurs souscrivent $T$, l'offre de bien public est $z = T$. L'utilité d'un consommateur $i$ quelconque s'écrit donc :

$$U^i(1 - t_i, \Sigma_i\, t_i) = \ln(1 - t_i) + \ln(\Sigma_i\, t_i).$$

Un équilibre de Nash du jeu de souscription est une suite de souscriptions $t_i^*$ :

$$-1/(1 - t_i^*) + 1/\Sigma_i\, t_i^* = 0, \text{ pour tout } i.$$

La solution de ce système est $t_i^* = 1/(n + 1)$, pour tout $i$. L'offre de bien public est $z^* = n/(n + 1)$.

b) Comparer avec l'état optimal de l'économie.

Un état optimal $E^0$ est un état économique possible vérifiant la condition BLS. C'est donc une solution du système :

$$\Sigma_i\, x_i = \Sigma_i\, w_i + y = n + y$$
$$f(y, z) = y + z = 0$$
$$\Sigma_i\, \mathrm{TMS}^i_{x,z} = \Sigma_i\, x_i/z = 1 = \mathrm{TMT}_{y,z}.$$

Après substitution, il vient : $(n - z)/z = 1$, soit $z^0 = n/2$.

On en conclut que le mécanisme de souscription décentralise $E^0$ si, et seulement si, $n = 1$. Sinon, on a $z^* < z^0$ ; autrement dit, la fourniture du bien public est insuffisante, comparée à l'état optimal $E^0$.

**Exercice 5** : Vote à la majorité simple

Soit une économie comportant un bien privé, un bien public, $I$ consommateurs $i = 1, \ldots, I$ et un producteur. On suppose que $I$ est impair. On utilise la spécification suivante :

$$U^i(x_i, z) = x_i + v_i \ln(z), \text{ pour tout } i,$$
$$f(y, z) = y + c\, z.$$

On suppose que $v_1 < v_2 < \ldots < v_I$. On note $V = \Sigma_i\, v_i$.

a) Déterminer le programme préféré de l'électeur médian.

Le coût total de la production de $z$ unités de bien public est $c\, z$. Si chaque électeur contribue $(c\, z)/n$ à son financement, l'utilité d'un électeur $i$ quelconque s'écrit :

$$U^i(w_i - c\, z/n, z) = (w_i - c\, z/n) + v_i \ln(z).$$

Son programme préféré $z_i^*$ vérifie :

$$\mathrm{TMS}^i_{x,z} = v_i/z = c/n = (1/n)\, \mathrm{TMT}_{y,z},$$

soit : $z_i^* = v_i\, n/c$.

On note qu'il est croissant avec $v_i$. L'électeur médian est $m = (I + 1)/2$. Le programme élu est $z_m^* = v_m\, n/c$.

b) Comparer avec l'état optimal de l'économie.

Si un état possible de l'économie est optimal, il vérifie la condition BLS :

$\Sigma_i \text{ TMS}^i_{x,\,z} = V/z = \text{c} = \text{TMT}_{y,\,z}$.

On en déduit que $z^0 = V/c$.

Le vote à la majorité simple décentralise l'état optimal quand $z_m{*} = v_m\, n/c = V/c = z^0$. Soit lorsque le paramètre de préférence de l'électeur médian $v_m$ est égal à la moyenne de ces mêmes paramètres dans le reste de la population : $v_m = V/n$.