CHAPITRE III

ANALYSE EN ÉQUILIBRE PARTIEL

1) Introduction

Ce chapitre sert de transition. On y présente le modèle d'équilibre partiel, plus simple et plus maniable. Il se prête notamment à des représentations graphiques utiles comme support au raisonnement. On retrouve ainsi l'ensemble des résultats du chapitre II.

2) Le modèle d'équilibre partiel*

Dans ce chapitre et les suivants, nous utiliserons la version simplifiée suivante du modèle de l'économie proposé aux chapitres I et II :

Modèle d'équilibre partiel :

On considère une économie composée :

- d'un bien de consommation, le *numéraire* (son prix est 1 €), et de l'environnement,
- de consommateurs $i = 1, 2, \ldots, I$ dotés initialement d'une quantité w_i du bien numéraire et dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité quasi-linéaire $U^i(x_i, z) = x_i - d_i(z)$, où x_i est sa consommation du bien,
- de producteurs $j = 1, 2, \ldots, J$ dont la technologie de production est donnée par l'ensemble de production $Y_j = \{y_j \,;\, y_j \leq f_j(z_j)\}$,

et vérifiant, outre cela, toutes les hypothèses des chapitres I et II :

- pour tout $i = 1, 2, \ldots, I$, on a : quel que soit z, $d_i'(z) \geq 0$ et $d_i''(z) > 0$,
- pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$, on a : $f_j''(z_j) < 0 < f_j'(z_j)$ pour $z_j < \underline{z}_j$; $f_j'(z_j) = 0$ pour $z_j \geq \underline{z}_j$.

Cette simplification s'interprète comme suit. L'analyse en équilibre partiel étudie un bien donné, séparément des autres ; dans notre cas, il s'agit de l'environnement. En principe, cette possibilité n'existe pas, tous les marchés étant liés. Néanmoins, on l'admet généralement si le bien considéré a une faible part dans le budget des consommateurs et si les variations de son prix ou de sa quantité induisent des effets de substitution diffus sur les autres marchés $k = 1, 2, \ldots, K$. Quand ces conditions sont réunies, pour toutes valeurs des z_j ($j = 1, 2, \ldots, J$), **approximativement** :

- les prix d'équilibre p_k ($k = 1, 2, \ldots, K$) sur les autres marchés sont donnés ;
- l'utilité du consommateur i est fonction de son revenu $\Sigma_k\, p_k\, x_{ik}$ et de la pollution z ;
- le profit $\Sigma_k\, p_k\, y_{jk}$ de l'entreprise j est fonction de ses rejets z_j,

et, par conséquent, il suffit de définir $w_i = \Sigma_k\, p_k\, w_{ik}$, $x_i = \Sigma_k\, p_k\, x_{ik}$ et $y_j = \Sigma_k\, p_k\, y_{jk}$, pour résumer l'équilibre économique sur les autres marchés.

3) Etats possibles, état optimal et surplus social**

En adaptant les propriétés de définition (i), (ii) et (iii) du chapitre I et (vi) du chapitre II, un état E est dit possible si ([1]) :

$$y_j \leq f_j(z_j),\ \Sigma_i\, x_i \leq \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, y_j,\ z_j \geq 0 \text{ et } z = \Sigma_j\, z_j.$$

A chaque état possible E, on peut associer un nombre W, appelé *surplus social*, défini par :

$$W = \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j) - \Sigma_i\, d_i(\Sigma_j\, z_j).$$

Ce concept est un outil de base du modèle d'équilibre partiel, comme l'indiquent les résultats suivants.

On montre au préalable que :

Si un état génère un surplus social égal à $W°$, les états accessibles depuis celui-ci, par une politique de redistribution du numéraire disponible, engendrent tous les profils d'utilité $(u_1, u_2, \ldots, u_I)$ tels que $\Sigma_i\, u_i \leq W°$.

En effet, considérons l'état possible $E°$, caractérisé par les quantités $x_i°$, $y_j°$, $z_j°$ et $z°$, pour $i = 1, 2, \ldots, I$ et $j = 1, 2, \ldots, J$, et le surplus $W° = \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j°) - \Sigma_i\, d_i(z°)$. Soit u_i ($i = 1, 2, \ldots, I$) un profil d'utilité vérifiant $\Sigma_i\, u_i \leq W°$ (resp. $\Sigma_i\, u_i > W°$). Construisons l'état E (défini par x_i, y_j, z_j et z, pour $i = 1, 2, \ldots, I$ et $j = 1, 2, \ldots, J$), tel que :

$$U^i(x_i, z) = x_i - d_i(z) = u_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, I,$$

$$y_j = f_j(z_j°) \text{ et } z_j = z_j° \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, J,$$

$$z = z°.$$

On vérifie directement que l'état E est possible : $\Sigma_i\, u_i \leq W°$ implique $\Sigma_i\, x_i \leq \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j)$ (resp. impossible : $\Sigma_i\, u_i > W°$ implique $\Sigma_i\, x_i > \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j)$).

Rappelant qu'un état est optimal si, pour tout autre état possible, il existe au moins un individu i dont l'utilité est strictement inférieure, on établit, comme corollaires :

Propriétés normatives du surplus social :

a) quels que soient les états $E°$ et E, si les surplus associés $W°$ et W sont tels que $W° < W$, il existe un état, accessible depuis E par une politique de redistribution, que tous les individus préfèrent à $E°$,

b) un état est optimal si et seulement s'il maximise le surplus social (la réciproque suppose que l'état considéré ne gaspille pas les ressources disponibles).

A nouveau, on définit l'état possible $E°$, par les quantités $x_i°$, $y_j°$, $z_j°$ et $z°$, et le surplus $W° = \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j°) - \Sigma_i\, d_i(z°)$.

Montrons le corollaire a). Par hypothèse, il existe un état E, défini par x_i, y_j, z_j et z, tel que le surplus associé $W = \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j) - \Sigma_i\, d_i(z) > W°$. Considérons alors le profil d'utilité suivant :

([1]) Par commodité, on ne maintient pas l'hypothèse (i) $x_i \geq 0$; ci-dessous, x_i est quelconque.

$$u_i = U^i(x_i°, z°) + (W – W°)/I \text{ pour } i = 1, 2, …, I.$$

En vertu du résultat obtenu préalablement, ce profil est accessible depuis E, car $\Sigma_i\, u_i = \Sigma_i\, U^i(x_i°, z°) + (W – W°) \leq W$ (sachant que $\Sigma_i\, U^i(x_i°, z°) \leq W°$). Par construction, tous les individus préfèrent l'état ainsi obtenu, ce qui prouve le résultat.

Montrons le b). Le sens direct est une conséquence immédiate du a) : s'il existe un état E tel que $W° < W$, il existe un état accessible depuis E unanimement préféré à $E°$, qui n'est donc pas optimal.

Pour la réciproque, on suppose que, quel que soit l'état possible E, le surplus W associé est tel que $W \leq W°$. Pour tout E et tout profil u_i (i = 1, 2, …, I) accessible à partir de E, on a donc $\Sigma_i\, u_i \leq W \leq W°$. Si, par ailleurs, l'état $E°$ ne gaspille pas les ressources disponibles (c'est-à-dire $y_j° = f_j(z_j°)$ et $\Sigma_i\, x_i° = \Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, y_j°$), on a $\Sigma_i\, U^i(x_i°, z°) = W°$, ce qui prouve que $E°$ est optimal.

On peut utiliser la figure 1 pour clarifier l'interprétation correcte de ces résultats. On y considère une économie composée des deux individus et trois états E, $E°$ et E^1. Chaque état renvoie à un point dans le plan (u_1, u_2), en fonction des utilités des individus. On associe à l'état E un surplus social égal à W, et aux états $E°$ et E^1 un surplus social égal à $W°$.

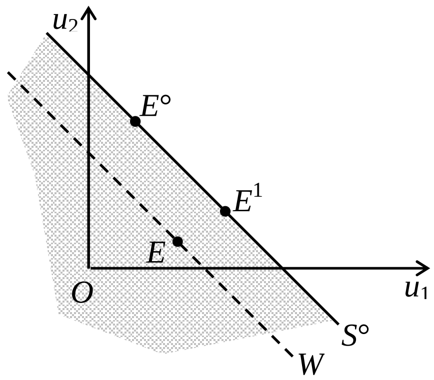


Figure 1.

Le résultat démontré en premier nous permet de dire qu'il est possible, à partir de E, d'atteindre, au moyen d'une redistribution adéquate des richesses disponibles, n'importe quel point (u_1, u_2) situé sur et sous la droite d'équation $u_1 + u_2 = W$. Par contre, les points situés au-dessus sont inaccessibles à partir de E.

Partant, si l'on suppose que le surplus social $W°$, associé à $E°$, est maximum, il vient que l'*ensemble des possibilités d'utilité*, défini comme tous les profils d'utilité (u_1, u_2) associé à un état possible de l'économie, vérifie $u_1 + u_2 \leq W°$. Il correspond, sur la figure 1, à la zone grisée.

Pour saisir l'intérêt normatif du corollaire a), imaginons que l'état initial de l'économie est E et que le Planificateur peut intervenir pour atteindre l'état $E°$. Sans être compatible avec le critère de Pareto, puisque l'utilité de l'individu 1 diminue entre E et $E°$, cette action permet d'améliorer le surplus social, car $W < W°$. La propriété a) affirme alors qu'il existe un état

préférable pour tous à E, obtenu en redistribuant le numéraire disponible en $E°$ (par exemple, E^1).
Deux attitudes sont possibles à partir de là. Pour qui s'en tient au seul critère de Pareto, l'intervention se justifie seulement si le Planificateur assortit son action d'une politique de redistribution pour rejoindre un état unanimement préféré. Ceci est possible, en vertu de la propriété a).
L'inconvénient de cette première voie vient de ce qu'elle repose sur l'hypothèse, implicite dans les raisonnements précédents, selon laquelle le Planificateur redistribue à volonté et sans coût. Elle n'est évidemment pas vérifiée en réalité. Si l'on prive le Planificateur de cet instrument, il peut alors arriver qu'il identifie des états impossibles à départager avec le critère de Pareto. C'est le cas, par exemple, de E et $E°$, qui ne sont pas comparables à l'aide du critère de Pareto.
L'autre attitude pare cette indétermination, en adoptant le *critère de compensation* :

Si le Planificateur suit le principe de compensation, il préfère l'état $E°$ à l'état E dès lors que les surplus associés $W°$ et W sont tels que $W° > W$.

En d'autres termes, il suffit qu'il existe une redistribution **potentielle**, donnant à tous une utilité plus grande par rapport à l'état initial, pour juger son intervention bénéfique.

Pour la suite, on retient que, dans les deux cas, le surplus social W reflète convenablement les préférences du Planificateur. Formellement, on a la propriété suivante :

Propriété des préférences du Planificateur :

Quels que soient les états E et $E°$ et les surplus sociaux associés W et $W°$, le Planificateur préfère (au sens du critère de Pareto ou de compensation) $E°$ à E si $W° > W$, et réciproquement.

4) Outils graphiques de l'analyse en équilibre partiel*

i) *Coûts des dommages de la pollution marginale*

On appelle *coût des dommages de la pollution marginale* de l'individu i ($i = 1, 2, \ldots, I$) (ou, plus simplement, *dommage marginal*), noté Dm_i, la quantité maximale du bien numéraire qu'il est disposé à céder pour limiter la pollution d'une unité (infiniment petite). Il se mesure en unités de numéraire par unité de pollution, soit en euros par unité de pollution (une unité de numéraire valant, par hypothèse, 1 €).
On peut relier cette notion aux hypothèses du modèle d'équilibre partiel. Un état initial $E°$, caractérisé par les quantités $x_i°$ et $z°$, et un état final E, obtenu à partir du premier en ajoutant les quantités infiniment petites dx_i de numéraire et dz de pollution, sont indifférents du point de vue de l'individu i ($i = 1, 2, \ldots, I$) si $-\, dx_i/dz = U_z^i/U_x^i$. Donc, en contrepartie d'une diminution de la pollution de $dz = -1$, il réclame, au minimum, $dx_i = U_z^i/U_x^i \leq 0$ unités de numéraire. Comme cette quantité est négative, cela signifie qu'il veut bien se départir, au

maximum, de $-U_z^i/U_x^i \geq 0$ unités de numéraire contre une unité de dépollution. Ce résultat se confond avec la définition ci-dessus du coût des dommages de la pollution marginale Dm_i. Sous les hypothèses du modèle d'équilibre partiel ($U_x^i = 1$, $U_z^i = -d_i' \geq 0$ et, quel que soit z, $d_i'(z) \geq 0$ et $d_i''(z) > 0$), il est donc fondé d'écrire :

$$Dm_i = -U_z^i/U_x^i = d_i' \geq 0,$$

$$Dm_i \text{ est croissant avec } z,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, I$.

Pour les raisonnements à venir, il est utile de définir le *coût **social** des dommages de la pollution marginale*, noté Dm. Il s'agit de la quantité maximale du bien numéraire que les individus sont collectivement prêts à abandonner pour limiter la pollution d'une unité infiniment petite. Du fait que l'environnement est un bien **non rival**, on a :

$$Dm = \Sigma_i\, Dm_i \geq 0,$$

$$Dm \text{ est croissant avec } z.$$

La figure 2 représente le coût des dommages de la pollution marginale Dm_i d'un individu i donné. La figure 3 construit le coût social des dommages de la pollution marginal Dm quand il y a deux individus, i et i'. Le principe de construction est simple : pour chaque abscisse z°, on lit les dommages marginaux individuels $Dm_i°$ et $Dm_{i'}°$; on les additionne pour obtenir la valeur correspondante du dommage marginal social, $Dm°$.

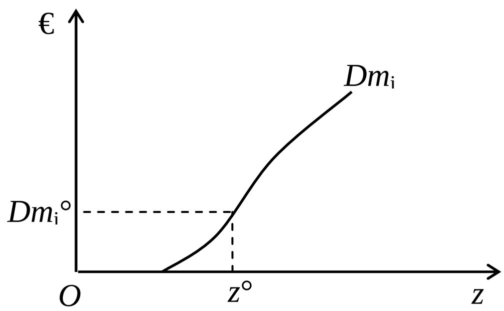


Figure 2.

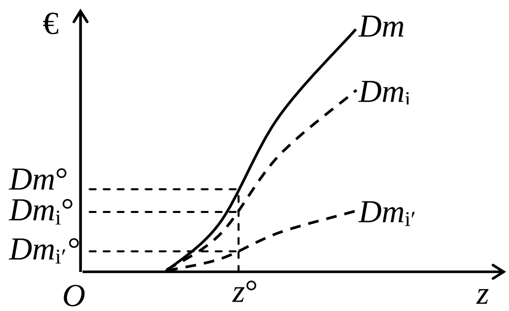


Figure 3.

Remarque : on note que les coûts des dommages de la pollution marginale Dm_i et Dm sont indépendants de la distribution des richesses entre les individus, c'est-à-dire des x_i ($i = 1, 2, \ldots, I$). Cette propriété découle du choix d'une fonction d'utilité quasi-linéaire. Elle contredit l'idée généralement admise selon laquelle la valeur de l'environnement augmente avec la richesse. Néanmoins, elle a le mérite de dissocier les états optimal et d'équilibre de la distribution (cf. ci-dessous) qui, si on l'abandonnait, ne seraient pas définis de façon unique.

ii) *Coûts de la dépollution marginale*

On définit le *coût de la dépollution marginale* du producteur j ($j = 1, 2, \ldots, J$) (ou, plus simplement, *coût marginal*), noté Cm_j, comme la quantité minimale du bien numéraire qu'il

doit cesser de produire pour réduire d'une unité (infiniment petite) ses rejets de polluants. Son unité de mesure est donc l'euro par unité rejetée.
Relions cette notion à la technologie de *j* (cf. hypothèses du modèle d'équilibre partiel). Supposant que le producteur est efficace, sa production de numéraire est donnée, pour tout z_j, par $y_j = f_j(z_j)$. Partant de $z_j°$, considérons alors une variation dz_j de ses rejets infiniment petite. On a $dy_j/dz_j = f_j'$ et, si $dz_j = -1$, $dy_j = -f_j' \leq 0$. Autrement dit, la dépollution d'une unité nécessite, au minimum, de renoncer à la production de f_j' unités du bien numéraire. Sous les hypothèses du modèle en équilibre partiel, on en déduit :

$$Cm_j = f_j',$$

Cm_j est décroissant avec z_j,

pour $j = 1, 2, \ldots, J$.

La figure 4 donne un exemple de courbe de coût de la dépollution marginale respectant les hypothèses du modèle en équilibre partiel (positive, décroissante et nulle au-delà de $\underline{z}_j$).

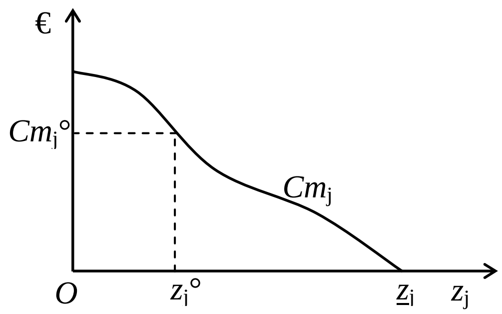


Figure 4.

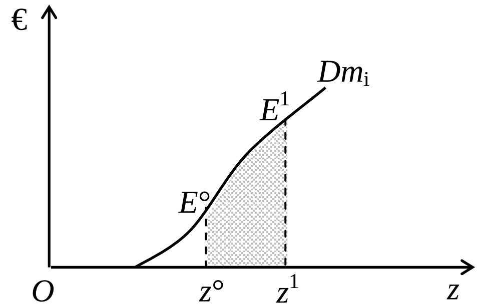
iii) *Mesure des variations d'utilité, de profit et de surplus social par les aires*

On expose, dans cette section, comment mesurer les variations de l'utilité des individus, du profit des entreprises et du surplus social, entre ces deux états, directement à partir des figures 2 à 4. Pour cela, on considère deux états possibles, $E°$ et E^1 et on note, pour chaque état $m = 0, 1$, les rejets individuels z_j^m, pour $j = 1, 2, \ldots, J$, les rejets totaux $z^m = \Sigma_j z_j^m$ et les surplus sociaux W^m.
Sur la figure ci-dessous (cf. Fig 2, avec quelques modifications), on suppose que l'environnement se détériore entre l'état $E°$ et l'état E^1, c'est-à-dire que $z° < z^1$. On veut évaluer la variation de l'utilité consécutive, subie par l'individu *i*. On montre que, à consommation et richesse inchangée ($x_i° = x_i^1$), elle est égale, en valeur absolue, à l'aire de la surface grisée, délimitée par l'axe des abscisses et la courbe Dm_i, entre les abscisses $z°$ et z^1.
En effet, la variation de l'utilité entre de l'état $E°$ et l'état E^1 s'écrit :

$$U^i(x_i^1, z^1) - U^i(x_i°, z°) = (x_i^1 - x_i°) - (d_i(z^1) - d_i(z°)).$$

Si l'on suppose que $x_i° = x_i^1$, sachant que d_i est une primitive de Dm_i, on a :

$$U^i(x_i^1, z^1) - U^i(x_i°, z°) = -\int_{z0}^{z1} Dm_i(t)\, dt.$$



(Figure 2.)

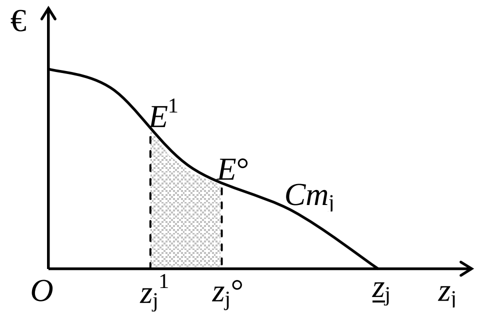
Sur la figure suivante (cf. Fig. 4, avec quelques modifications), on suppose qu'entre l'état $E°$ et l'état E^1, le producteur *j* limite ses rejets, c'est-à-dire que $z_j° > z_j^1$. On montre alors que la variation de la production et du profit que le producteur *j* endure, pour ce faire, est égale, en valeur absolue, à l'aire de la surface grisée, délimitée par l'axe des abscisses et la courbe Cm_j, entre les abscisses $z_j°$ et z_j^1.

Notons d'abord que, tant que les rejets sont gratuits, le profit de *j* s'écrit $\pi_j = y_j$, car le bien est numéraire. Donc, les variations de la production et du profit se confondent. Entre l'état $E°$ et l'état E^1, le profit de l'entreprise *j* varie donc de :

$$\pi_j^1 - \pi_j° = f_j(z_j^1) - f_j(z_j°).$$

Sachant que f_j est une primitive de Cm_j, on peut écrire :

$$\pi_j^1 - \pi_j° = \int_{z_j^0}^{z_j^1} Cm_j(t)\,dt.$$



(Figure 4.)

Finalement, la variation du surplus social peut aussi être reliée à la somme des aires sur les graphiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W^1 - W° &= (\Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j^1) - \Sigma_i\, d_i(z^1)) - (\Sigma_i\, w_i + \Sigma_j\, f_j(z_j°) - \Sigma_i\, d_i(z°)) \\ &= \Sigma_j\, (f_j(z_j^1) - f_j(z_j°)) - \Sigma_i\, (d_i(z^1) - d_i(z°)) \\ &= \Sigma_j\, (\int_{z_j^0}^{z_j^1} Cm_j(t)\,dt) - \int_{z^0}^{z^1} Dm(t)\,dt, \end{aligned}$$

sachant que $\Sigma_i\, d_i$ est une primitive de *Dm*.

Pour la suite, il est commode de normaliser le surplus social comme suit. On définit l'état $\underline{E}$ comme l'état où tous les producteurs rejettent la quantité $\underline{z}_j$, telle que $Cm_j(\underline{z}_j) = 0$. Comme le surplus social est un indicateur ordinal des préférences du Planificateur, on est en droit de le normaliser de telle manière qu'il s'annule, par exemple, pour l'état $\underline{E}$, soit $\underline{W} = 0$. Alors, la mesure normalisée du surplus, pour l'état E quelconque, est :

$$(1) \qquad W = \int_{z}^{\underline{z}} Dm(t)\,dt - \Sigma_j \left(\int_{z_j}^{\underline{z}_j} Cm_j(t)\,dt\right).$$

Nous verrons dans un instant que l'état $\underline{E}$ est l'unique équilibre de marché de l'économie. Après la normalisation, le Planificateur associe donc un surplus social nul à l'équilibre de marché.

Logiquement, nous considérerons, par la suite, seulement des valeurs $z_j \leq \underline{z}_j$, pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$. Alors, chaque terme de l'expression du surplus a une interprétation précise. Relativement à l'équilibre de marché de l'économie :

- le premier représente le bénéfice total pour les individus de la baisse de la pollution de $\underline{z} - z$,
- le second terme représente le coût total de cette dépollution, chaque producteur contribuant à hauteur de $\underline{z}_j - z_j$.

5) Retour sur le chapitre II*

Le modèle en équilibre partiel vérifie les hypothèses des chapitres I et II. Par conséquent, les résultats obtenus précédemment restent valables :

- un état optimal $E°$ vérifie les équations (2) du chapitre II ;
- un équilibre de marché $\underline{E}$ vérifie les équations (4) du chapitre II ;
- tous les instruments du Planificateur sont équivalents.

Nous reprenons ces résultats ci-dessous, afin d'en actualiser la formulation. Au passage, nous en profitons pour illustrer l'intérêt des notions vues à la section 4 et pour nous familiariser avec quelques raisonnements utilisant les représentations graphiques des courbes de dommage marginal et de coûts marginaux.

Pour ne pas surcharger les figures, nous considérons l'**exemple** suivant :

Il existe seulement deux technologies possibles, résumées par la donnée de Cm^-et Cm^+. On a donc, pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$, $Cm_j = Cm^-$ ou $Cm_j = Cm^+$. Les entreprises telles que $Cm_j = Cm^-$ sont dites de type –, les autres de type +.

Grâce à cette simplification, deux coupes dans l'espace des états suffisent à représenter, sur la figure 5, toute l'information nécessaire.

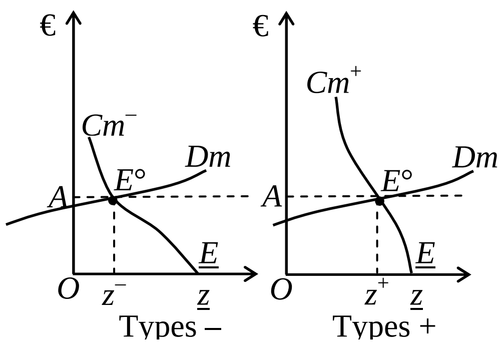


Figure 5.

i) *Etat optimal*

On a montré qu'un état $E°$ est optimal si et seulement s'il vérifie les équations (2) du chapitre II. En utilisant les notions vues à la section précédente, elles s'écrivent :

(2) $$Dm = Cm_1 = Cm_2 = \ldots = Cm_J.$$

On peut retrouver la condition (2) en utilisant l'expression du surplus social. En effet, on a vu (cf. prop. b) du surplus social) qu'un état $E°$ est optimal si et seulement s'il maximise le surplus social. Donc, les quantités $z_j°$ ($j = 1, 2, \ldots, J$) maximise :

$$W = \int_{\underline{z}}^{z} Dm(t)\,dt - \Sigma_j \left(\int_{\underline{z}_j}^{z_j} Cm_j(t)\,dt\right),$$

sous les contraintes $z_j \geq 0$ et $z = \Sigma_j z_j$. Alors, en supposant une solution intérieure, elles vérifient :

$$-Dm(\Sigma_j z_j°) + Cm_j(z_j°) = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, J.$$

Ces conditions sont suffisantes sous les hypothèses du modèle d'équilibre partiel.

Graphiquement, l'état optimal $E°$ se situe à l'intersection de la courbe Dm avec les courbes Cm_j ($j = 1, 2, \ldots, J$), de types – ou + (cf. Fig. 5). Un raisonnement simple permet de le comprendre. Chaque unité additionnelle infiniment petite rejetée rapporte Cm^- aux entreprises de type –, Cm^+ aux entreprises de type +. Elle coûte collectivement Dm. Donc, tant que $Cm^- < Dm$ (resp. $Cm^+ < Dm$), l'entreprise améliore le surplus social en s'abstenant de rejeter cette unité, et inversement. Finalement, le surplus social est maximum quand les entreprises de types – rejettent la quantité z^-, à l'intersection de Cm^- et Dm, et les entreprises de type + la quantité z^+, à l'intersection de Cm^+ et Dm.

ii) *Equilibre de marché concurrentiel*

Aux notations près, on a montré qu'un équilibre de marché $\underline{E}$ de l'économie vérifie la propriété (cf. Chap. II, équations (4)) :

(3) $$Cm_1 = Cm_2 = \ldots = Cm_J = 0.$$

On retrouve ce résultat en utilisant l'expression du profit de l'entreprise de la section 4 (sachant que les rejets sont gratuits). L'état $\underline{E}$ est un équilibre de marché s'il maximise, pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$:

$$\pi_j - \underline{\pi}_j = \int_{\underline{z}_j}^{z_j} Cm_j(t)\,dt,$$

sous la contrainte $z_j \geq 0$. Il vérifie donc les conditions :

$$Cm_j(\underline{z}_j) = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \ldots, J.$$

Ces conditions sont suffisantes sous les hypothèses du modèle d'équilibre partiel.

Graphiquement, l'équilibre du marché se trouve au point d'intersection des courbes Cm_j (j = 1, 2, …, J), de types – ou +, avec l'axe des abscisses (cf. Fig. 5). Ce fait est évident. Chaque unité additionnelle infiniment petite rejetée rapportant Cm^- (resp. Cm^+) aux entreprises de type – (resp. +), tant que $Cm^- > 0$ (resp. $Cm^+ > 0$), l'entreprise améliore son profit. Il est donc maximum pour la quantité rejetée $\underline{z}$, à l'intersection de Cm^- (resp. Cm^+) avec l'axe des abscisses.

iii) *Equivalence des instruments*

L'objectif du Planificateur est de guider l'économie vers l'état $E°$, puisqu'il maximise le surplus social. Les instruments dont il dispose sont :

a) un système de normes de rejets individuelles $z_j°$,

b) une taxe pigouvienne de taux unitaire OA,

c) une subvention de la dépollution de taux unitaire OA,

d) un marché de droits de polluer émis en quantité $z°$ et alloués gratuitement,

e) un marché de droits de polluer émis en quantité $z°$ et mis aux enchères.

Sous l'hypothèse d'information parfaite, nous avons établi que le choix de l'instrument est indifférent, car tous permettent de rejoindre l'état $E°$ (cf. Chap. II, sect. 5, prop. d'équivalence des instruments).

Nous pouvons l'illustrer rapidement. Par hypothèse, le Planificateur connaît les Dm_i et les Cm_j, pour tout i = 1, 2, …, I et j = 1, 2, …, J. Il commence par déterminer l'état optimal $E°$, c'est-à-dire les rejets optimaux $z_j° = z^-$ ou z^+ des entreprises, pour j = 1, 2, …, J, et le coût social des dommages marginaux OA.

S'il emploie l'instrument a), il se contente d'imposer aux entreprises les quotas individuels $z_j° = z^-$ ou z^+, en fonction de leur type – ou +.

Avec l'instrument b), il impose une taxe unitaire sur les rejets $t_z = OA$. Chaque entreprise choisit ensuite ses rejets pour maximiser son profit : $\pi_j = y_j - OA\ z_j$, pour tout j = 1, 2, …, J. Chaque unité de rejet évitée permet à l'entreprise d'économiser la taxe, soit OA par unité. En contrepartie, cela lui coûte Cm^- ou Cm^+, selon son type. Tant que $OA > Cm^-$ (resp. $OA > Cm^+$), l'entreprise de type – (resp. +) accroît son profit en dépolluant, et inversement. Pour maximiser son profit, elle doit rejeter la quantité z^- telle que $Cm^- = OA$ (resp. z^+ telle que $Cm^+ = OA$). De façon imagée, les entreprises retirent toutes les unités dont le coût d'élimination est inférieur à la taxe ; réciproquement, elles rejettent celles dont le coût d'élimination est supérieur à la taxe.

La subvention de la dépollution au taux $s_z = OA$ (instrument c) produit le même résultat. Le profit s'écrit : $\pi_j = y_j + OA\ (\underline{z}_j - z_j)$, pour tout j = 1, 2, …, J. A la constante $OA\ \underline{z}_j$ près, il a la même expression que ci-dessus. Il s'ensuit que les entreprises prennent les mêmes décisions.

Avec l'instrument d), le Planificateur distribue la dotation initiale $J\ (q\ z^- + (1 - q)\ z^+)$ sous forme de coupons aux entreprises (en notant q la proportion d'entreprises de type –) et organise un marché sur lequel elles peuvent se les échanger. Chaque entreprise a l'obligation légale de rejeter une quantité inférieure ou égale au nombre de droits qu'elle possède après échange. On montre que le prix du coupon qui équilibre ce marché est $p_z = OA$. En effet, en supposant que les entreprises rejettent exactement une quantité égale au nombre de droits qu'elles possèdent après échange (car rejeter plus est interdit et rejeter moins coûte), leur profit s'écrit : $\pi_j = y_j + OA\,(r_j - z_j)$, en notant r_j le nombre de coupons obtenus gratuitement, pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$. A nouveau, à la constante $OA\, r_j$ près, il a la même expression qu'avec la taxe pigouvienne. Il s'ensuit que les entreprises prennent les mêmes décisions (z^- pour le type – et z^+ pour le type +). Le marché est équilibré, puisque la quantité rejetée, au total $J\,(q\,z^- + (1 - q)\,z^+)$, égale la dotation initiale de coupons.

Avec l'instrument e), le Planificateur met aux enchères la dotation initiale $J\,(q\,z^- + (1 - q)\,z^+)$. L'équilibre de l'enchère et du marché des coupons a lieu à nouveau au prix OA.

5) Exercices

On considère, pour toute la suite, des fonctions quadratiques :

$$U^i(x_i, z) = x_i - d_i\, z^2/2, \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, I,$$

$$f_j(z_j) = z_j\,(b_j - c_j\, z_j/2), \text{ avec } z_j \leq \underline{z}_j = b_j/c_j, \text{ pour tout } j = 1, 2, \ldots, J.$$

où tous les paramètres sont positifs.

i) *Outils de base*

Exercice 1 : Coût individuel des dommages

En utilisant les hypothèses ci-dessus pour le consommateur 1 :

a) Déterminer Dm_1.

b) En faire la représentation graphique.

c) Donner l'expression de l'aire de la surface sous la courbe représentative de Dm_1 comprise entre les abscisses 0 et x donné.

d) Comparer à U^1. Conclure.

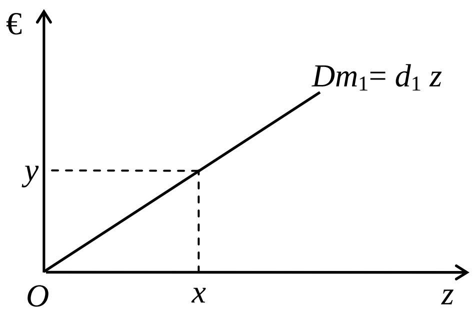
Corrigé :

On utilise l'expression $U^1(x_1, z) = x_1 - d_1\, z^2/2$.

a) On a vu (cf. Sect. 4) que $Dm_1 = -\,U_z^1/U_x^1$. On a donc :

$$Dm_1 = d_1\, z.$$

b) Représentation graphique :



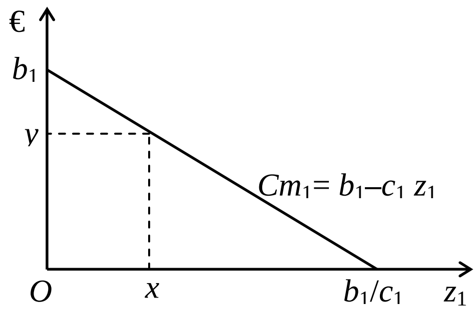
c) La surface entre O et x sous la courbe représentative de Dm_1 est triangulaire. Le point (x, y), appartenant à celle-ci, vérifie $y = d_1\, x$. Donc, l'aire de cette surface est égal à $x\, y/2 = d_1\, x^2/2$.
d) On retrouve évidemment le second terme de U^1 (précisément, l'opposé du second terme de U^1). On en déduit que l'aire des surfaces sous Dm_1 entre les abscisses x et x' quelconques évalue, si $x < x'$, la diminution ou, si $x > x'$, l'augmentation de l'utilité du consommateur 1 en passant de x à x' (évaluée en €).

Exercice 2 : Coût individuel de dépollution
En utilisant les hypothèses ci-dessus pour le producteur 1 :
a) Déterminer Cm_1.
b) En faire la représentation graphique.
c) Donner l'expression de l'aire de la surface sous la courbe représentative de Cm_1 comprise entre les abscisses 0 et x donné.
d) Comparer à f_1. Conclure.

Corrigé :
On utilise l'expression $f^1(z_1) = z_1\, (b_1 - c_1\, z_1/2)$.
a) On a vu (cf. Sect. 4) que $Cm_1 = -\, f_1'$. On a donc :

$$Cm_1 = b_1 - c_1\, z_1.$$

b) Pour la représentation graphique, on note que la courbe représentative de Cm_1 est une droite passant par les points $(0, b_1)$ et $(b_1/c_1, 0)$. On obtient donc :



c) La surface entre O et x sous la courbe représentative de Cm_1 est un trapèze. Le point (x, y), appartenant à celle-ci, vérifie $y = b_1 - c_1\, x$. Donc, l'aire de cette surface est égale à $x\, (b_1 + y)/2 = x\, (2\, b_1 - c_1\, x)/2 = x\, (b_1 - c_1\, x/2)$.
d) Sans surprise, on reconnaît l'expression de f_1. Il vient donc que l'aire des surfaces sous Cm_1 entre les abscisses x et x' quelconques évalue, si $x < x'$, l'accroissement ou, si $x > x'$, la diminution de la production de numéraire par le producteur 1 en passant de x à x'.

Exercice 3 : Coût social des dommages
En utilisant les hypothèses posées au départ, donner l'expression de Dm.

Corrigé : On a vu (cf. Sect. 4) que $Dm = \Sigma_i\, Dm_i$. Sachant que $Dm_i = d_i\, z$, on a :

$$Dm_1 = D\,z,$$

avec $D = \Sigma_i\, d_i$.

Exercice 4 : Surplus social et état optimal

On suppose qu'il y a un seul consommateur et deux producteurs ($I = 1$ et $J = 2$) et que $d_1 = b_1 = c_1 = 2\, b_2 = 2\, c_2 = 1$.

a) Donner l'expression du surplus social W (cf. Sect. 4, équation (1)).

b) Déterminer l'état optimal de l'économie.

c) Vérifier graphiquement la solution en s'inspirant de la figure 5.

Corrigé :

a) On l'utilise l'équation (1) comme définition du surplus social :

$$W = \int_{\underline{z}}^{z} Dm(t)\, dt - \Sigma_j \left(\int_{\underline{z}_j}^{z_j} Cm_j(t)\, dt\right),$$

où $z = \Sigma_j\, z_j$, $\underline{z}_j$ vérifie $Cm_j(\underline{z}_j) = 0$ pour tout j et $\underline{z} = \Sigma_j\, \underline{z}_j$.

En utilisant les résultats des exercices précédents, on a :

$$Dm = Dm_1 = z,$$

$$Cm_1 = 1 - z_1,$$

$$Cm_2 = (1 - z_2)/2.$$

On en déduit que $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = 1$ et $\underline{z} = 2$. En introduisant ces résultats dans l'expression de définition de W, il vient :

$$W = \int_{z}^{2} t\, dt - \int_{z_1}^{1} (1 - t)\, dt - \int_{z_2}^{1} (1 - t)/2\, dt$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} W &= 5/4 - (z_1 + z_2)^2/2 + z_1\,(1 - z_1/2) + z_2\,(1 - z_2/2)/2 \\ &= 5/4 + z_1 + z_2/2 - z_1\, z_2 - (z_1)^2 - 3\,(z_2)^2 \end{aligned}$$

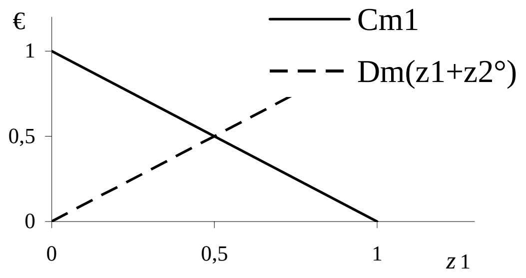
b) Soit $E°$, défini par $z_1°$ et $z_2°$, l'état optimal de l'économie. On a vu qu'il maximise le surplus social W (cf. Sect. 3). Il s'ensuit que les dérivées partielles de l'expression précédente s'annulent en $E°$:

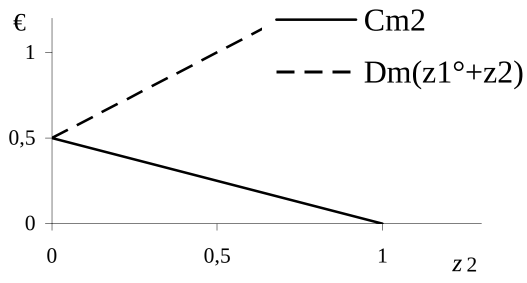
$$1 - 2\, z_1° - z_2° = 0, \qquad (z_1)$$

$$1/2 - z_1° - 6\, z_2° = 0, \qquad (z_2)$$

La solution de ce système linéaire est $z_1° = 1/2$ et $z_2° = 0$.

c) Construisons l'équivalent de la figure 5 pour cet exercice. On considère deux coupes de l'espace des états, autour de l'état optimal, en fixant $z_2 = z_2° = 0$ d'abord, $z_1 = z_1° = 1/2$ ensuite. Ainsi, on représente, dans le plan (z_1, €), $Dm_1 = z_1$ (car $z_2° = 0$) et $Cm_1 = 1 - z_1$ et, dans le plan (z_2, €), $Dm_1 = 1/2 + z_2$ (car $z_1° = 1/2$) et $Cm_2 = (1 - z_1)/2$.





On confirme ainsi que l'état $E°$, défini à la question précédente par $z_1° = 1/2$ et $z_2° = 0$, vérifie la condition (2) de la section 5 :

$$Dm_1 = Cm_1 = Cm_2.$$

ii) *Equivalence des instruments*

Exercice 5 : Taxe unitaire sur les rejets

On conserve les hypothèses de l'exercice précédent. On note λ la taxe unitaire sur les rejets des pollueurs.

a) Exprimer le profit des producteurs (cf. Sect. 4). On pose, pour normaliser, que $\pi_j = 0$ si $z_j = 0$, pour $j = 1, 2$.

b) Vérifier le résultat à l'aide d'un graphique.

c) Déterminer la quantité z_j qui maximise π_j en fonction de λ, pour $j = 1, 2$. Montrer qu'elle vérifie $Cm_j = \lambda$ (pour simplifier, on suppose que λ est compris entre 0 et 1, ce qui garantit une solution intérieure).

d) Exprimer la pollution totale en fonction de λ quand les producteurs maximisent leur profit.

e) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, trouver la valeur $\lambda°$ de la taxe telle que l'économie rejoigne l'état optimal quand les producteurs maximisent leur profit. Comparer avec le coût des dommages marginaux évalué à l'état optimal.

Corrigé :

a) L'entreprise j produit la quantité $f_j(z_j)$ et rejette, en contrepartie, la quantité z_j. Le bien étant numéraire et la taxe unitaire sur les rejets valant λ, le profit s'écrit :

$$f_j(z_j) - \lambda\, z_j = z_j\,(b_j - c_j\, z_j/2) - \lambda\, z_j.$$

Une autre méthode, utile lorsqu'on donne l'expression du coût de la dépollution marginale Cm_j à la place de la production $f_j(z_j)$, part de l'expression suivante (cf. Sect. 4) :

$$\pi_j^1 - \pi_j° = \int_{z_j^0}^{z_j^1} Cm_j(t)\,\mathrm{d}t,$$

qui définit les variations du profit de j quand ses rejets passent de $z_j°$ à z_j^1, quand la taxe est nulle (soit quand $\lambda = 0$).

Posons $z_j° = 0$ et $z_j^1 = z_j$. Dans cet exercice, on a $\pi_j° = 0$ (c'est le profit associé à $z_j° = 0$) et $Cm_j(z_j) = b_j - c_j\, z_j$. Si le producteur paye λ sur chaque unité rejetée, son profit devient donc :

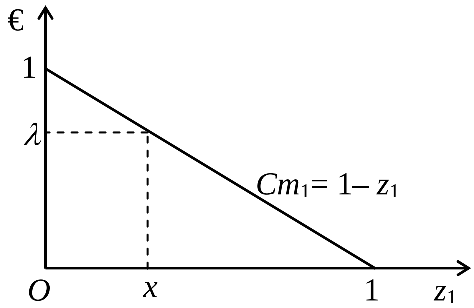
$$\pi_j = \int_0^{z_j} (b_j - c_j\, t)\, dt - \lambda\, z_j = z_j\, (b_j - c_j\, z_j/2) - \lambda\, z_j.$$

On a donc, en utilisant les paramètres $b_1 = c_1 = 2\, b_2 = 2\, c_2 = 1$:

$$\pi_1 = z_1\,(1 - z_1/2) - \lambda\, z_1,$$

$$\pi_2 = z_2\,(1 - z_2/2)/2 - \lambda\, z_2.$$

b) Vérifions par exemple pour le producteur 1. On représente Cm_1 et on fixe λ quelconque sur le graphique ci-dessous :



Dans l'exercice 2, on a montré que le passage de O à x permet au producteur 1 de produire $x\,(1 - x/2)$ unités du numéraire (aire du trapèze sous Cm_1 entre O et x). Il accroît donc son profit du même montant. Mais, au passage, il doit payer λ par unité rejetée, soit $\lambda\, x$ au total. Son profit est donc bien $x\,(1 - x/2 - \lambda)$ (sachant qu'il est nul pour $z_1 = 0$).

c) La quantité rejetée $z_j°$ maximise le profit de j si et seulement si elle annule la dérivée de π_j par rapport à z_j (avec $\lambda \leq b_j$ pour une solution intérieure) :

$$b_j - c_j\, z_j° - \lambda = 0, \text{ pour } j = 1, 2.$$

En faisant varier λ, on définit la relation :

$$z_j° = g_j(\lambda) = (b_j - \lambda)/c_j, \text{ pour } j = 1, 2.$$

En utilisant les données de l'exercice, on a :

$$g_1(\lambda) = 1 - \lambda,$$

$$g_2(\lambda) = 1 - 2\,\lambda.$$

On vérifie immédiatement que $g_j(\lambda)$ est tel que $Cm_j(g_j(\lambda)) = \lambda$ en se reportant à la condition d'optimalité ci-dessus.

d) Si les pollueurs maximisent leur profit, la pollution totale dépend de la taxe. On définit ainsi la fonction $g(\lambda)$ par :

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) + g_2(\lambda) = 2 - 3\,\lambda.$$

e) On a montré dans l'exercice précédent que, sachant que $Dm = Dm_1 = z$, l'état optimal $E°$ est $z_1° = 1/2$ et $z_2° = 0$. On montre qu'il est rejoint spontanément par les producteurs si la taxe est égale à $\lambda° = 1/2$. En effet, on a :

$$g_1(1/2) = 1/2,$$

$$g_2(1/2) = 0.$$

Ce montant correspond au coût des dommages marginaux, évalué en $E°$:

$$Dm(z_1° + z_2°) = 1/2 = \lambda°$$

Exercice 6 : Marché de droits de polluer

On conserve les hypothèses de l'exercice 4. On note Z le nombre de coupons distribués par le Planificateur et λ leur prix (on admet que $Z \geq 1/2$, ce qui garantit une solution intérieure). On suppose que chaque pollueur reçoit initialement $Z/2$ coupons.

a) Exprimer le profit des producteurs (cf. Sect. 4). On pose, pour normaliser, que $\pi_j = \lambda\, Z/2$ si $z_j = 0$, pour $j = 1, 2$ ($\lambda\, Z/2$ est la recette de la vente des $Z/2$ coupons, inutiles si $z_j = 0$).

b) Déterminer le prix d'équilibre du marché en fonction de la dotation initiale. Montrer qu'à l'équilibre du marché, on a $Cm_j = \lambda$, pour $j = 1, 2$.

c) Quel est le prix d'équilibre si le Planificateur distribue $Z = z_1° + z_2° = 1/2$ coupons ? Comparer avec le coût des dommages marginaux évalué en $E°$ (cf. exercice 4).

Corrigé :

a) L'entreprise j produit la quantité $f_j(z_j)$ du numéraire, rejette la quantité z_j et revend ses coupons excédentaires $Z - z_j$ au prix λ. Son profit s'écrit :

$$f_j(z_j) - \lambda\, z_j = z_j\, (b_j - c_j\, z_j/2) - \lambda\, z_j.$$

En partant de Cm_j et de l'expression de la variation du profit de j quand ses rejets passent de $z_j°$ à z_j^1, quand $\lambda = 0$ (cf. Sect. 4) :

$$\pi_j^1 - \pi_j° = \int_{z_j^0}^{z_j^1} (b_j - c_j\, z_j)\, dt,$$

on pose $z_j° = 0$ et $z_j^1 = z_j$, et sachant que le producteur vend $Z/2 - z_j$ coupons au prix λ, son profit vaut ici :

$$\pi_j = \int_0^{z_j} (b_j - c_j\, t)\, dt + \lambda\, (Z/2 - z_j) = z_j\, (b_j - c_j\, z_j/2) + \lambda\, (Z/2 - z_j).$$

On vérifie que $\pi_j = \lambda\, Z/2$ quand $z_j = 0$. En utilisant les paramètres $b_1 = c_1 = 2\, b_2 = 2\, c_2 = 1$, on a :

$$\pi_1 = z_1\, (1 - z_1/2) + \lambda\, (Z/2 - z_1),$$
$$\pi_2 = z_2\, (1 - z_2/2)/2 + \lambda\, (Z/2 - z_2).$$

b) Les résultats de l'exercice précédent s'appliquent. Les producteurs maximisent leur profit en rejetant la quantité $g_j(\lambda) = (b_j - \lambda)/c_j$, pour $j = 1, 2$. Il s'ensuit que l'offre nette de coupons par j égale :

$$Z/2 - g_j(\lambda) = Z/2 - (b_j - \lambda)/c_j, \text{ pour } j = 1, 2.$$

A l'équilibre du marché, la somme des offres nettes est nulle :

$$Z - g_1(\lambda) - g_2(\lambda) = Z - (b_1 - \lambda)/c_1 - (b_2 - \lambda)/c_2 = 0.$$

On en déduit le prix d'équilibre du marché en fonction de la dotation initiale Z :

$$\lambda = (b_1\, c_2 + b_2\, c_1 - c_1\, c_2\, Z)/(c_1 + c_2).$$

En utilisant les valeurs des paramètres pour l'exercice, on a :

$$\lambda = 2\, (1 - Z/2)/3.$$

Le fait qu'à l'équilibre du marché, on a $Cm_j = \lambda$, pour $j = 1, 2$, découle des propriétés des fonctions $g_j(\lambda)$ (cf. exercice 5).

c) Si $Z = z_1° + z_2° = 1/2$, alors $\lambda = Dm(z_1° + z_2°) = 1/2$, $g_1(1/2) = z_1° = 1/2$ et $g_2(1/2) = z_2° = 0$. Le marché guide l'économie vers l'état optimal.

Exercice 7 : Trouver l'expression du surplus à l'état optimal de l'économie en fonction des paramètres d_i ($i = 1, 2, \dots, I$), b_j et c_j ($j = 1, 2, \dots, J$).

Corrigé : On par de l'équation (1) de définition du surplus social :

$$W = \int_{z}^{\underline{z}} Dm(t)\, dt - \Sigma_j \left(\int_{z_j}^{\underline{z}_j} Cm_j(t)\, dt\right),$$

où $z = \Sigma_j z_j$, $\underline{z}_j$ vérifie $Cm_j(\underline{z}_j) = 0$ pour tout j et $\underline{z} = \Sigma_j \underline{z}_j$. Avec $Dm = \Sigma_i Dm_i = D\, z$ ($D = \Sigma_i d_i$) et $Cm_j = b_j - c_j z_j$, le surplus social s'écrit :

$$W = \int_{z}^{\underline{z}} D\, t\, dt - \Sigma_j \left(\int_{z_j}^{\underline{z}_j} (b_j - c_j t)\, dt\right)$$

où $z = \Sigma_j z_j$, $\underline{z}_j = b_j/c_j$ pour tout j et $\underline{z} = \Sigma_j \underline{z}_j$. Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} W &= D\,(\underline{z}^2 - z^2)/2 - \Sigma_j\, (\underline{z}_j\, (b_j - c_j\, \underline{z}_j/2) - z_j\, (b_j - c_j\, z_j/2)) \\ &= D\,(\underline{z}^2 - z^2)/2 - \Sigma_j\, (b_j^2/2c_j - z_j\, (b_j - c_j\, z_j/2)) \end{aligned}$$

L'état $E°$, défini par $z_1°, z_2°, \dots, z_J°$, maximise W si et seulement si les dérivées partielles de W par rapport à z_j ($j = 1, 2, \dots, J$) s'annulent en $E°$:

$$-D\, \Sigma_j z_j° + b_j - c_j z_j° = 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, J.$$

En divisant par c_j et faisant la somme des J conditions ainsi obtenues, il vient l'égalité (sachant $\Sigma_j z_j° = z°$) :

$$-D\, z° / C + \underline{z} - z° = 0,$$

avec $1/C = \Sigma_j (1/c_j)$ et $\underline{z} = \Sigma_j b_j/c_j$. On en déduit la pollution totale en $E°$:

$$z° = C\, \underline{z}/(C + D).$$

En substituant dans les J conditions d'optimalité de départ, on obtient finalement :

$$z_j° = (b_j - D\, C\, \underline{z}/(C + D))/c_j, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, J.$$

On remplace ensuite dans W :

- pour le premier terme :

$$D\,(\underline{z}^2 - z°^2)/2 = D^2\, \underline{z}^2\, (2\, C + D)/2(C + D)^2\ ;$$

- pour le second terme :

$$\Sigma_j\, (b_j^2/2c_j - z_j°\, (b_j - c_j\, z_j°/2)) = D^2\, C\, \underline{z}^2/2(C + D)^2.$$

On en déduit immédiatement le surplus social quand le coût social de la dépollution totale est minimum :

$$W = D^2\, \underline{z}^2 / 2(C + D).$$