ANNEXE 1 – Notions mathématiques utilisées (d'après Michel, 1989)

Définition : une fonction f, définie sur un sous-ensemble convexe C de IR^n, est strictement quasi-concave si :

$$\forall\ (X_0, X_1) \in C^2,\ \forall\ s\in[0, 1],\ f(s\ X_0 + (1 - s)\ X_1) > \min\ \{f(X_0), f(X_1)\}.$$

Théorème du langrangien généralisé :

Soit C un sous-ensemble de IR^n. On considère le problème d'optimisation suivant :

Maximiser $f(X)$ sur l'ensemble A des points X de C qui vérifient :

$$g_i(X) \leq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } h_j(X) = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq q.$$

La fonction f est appelée la fonction objectif, les p conditions d'inégalités sont appelées contraintes et les q conditions d'égalité sont appelées liaisons.

Le lagrangien généralisé du problème d'optimisation est la fonction de X :

$$L(X) = a_0\ f(X) - \Sigma_i\ a_i\ g_i(X) - \Sigma_j\ b_j\ h_j(X)$$

qui dépend de $p + q + 1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ appelés multiplicateur et ayant les propriétés suivantes :

1) les $p + q + 1$ multiplicateurs $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ ne sont pas tous nuls,
2) les $p + 1$ multiplicateurs $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont tous positifs ou nuls.

Théorème (condition nécessaire d'optimalité) :

Soit X^* un point intérieur de C. Si X^* est une solution optimale locale du problème d'optimisation et si les $p + q + 1$ fonctions f, g_i et h_j sont continues sur un voisinage de X^* et différentiable en X^*, il existe $p + q + 1$ multiplicateurs du lagrangien généralisé vérifiant les propriétés 1 et 2 et tels que :

3) les p multiplicateurs des contraintes vérifient les relations d'exclusion :

$$a_i\ g_i(X) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p,$$

4) les n dérivées partielles en X^* du lagrangien généralisé sont égales à 0.

On dit que le problème d'optimisation est convexe si l'ensemble C est convexe, la fonction f est concave sur C, les fonctions g_i ($1 \leq i \leq p$) sont convexes sur C et les fonctions h_j ($1 \leq j \leq q$) sont affines sur C.

Théorème (condition suffisante d'optimalité globale) :

On suppose que f, g_i ($1 \leq i \leq p$) et h_j ($1 \leq j \leq q$) sont différentiables en X^*. Si le problème d'optimisation est convexe et si la différentielle du lagrangien est nulle, alors X^* est une solution optimale globale du problème d'optimisation.

On dit que le problème d'optimisation est linéaire si $C = IR^n$ et si les fonctions f, g_i ($1 \leq i \leq p$) et h_j ($1 \leq j \leq q$) sont affines. Alors, il peut s'écrire :

Maximiser $V \cdot X$ sur l'ensemble $A = \{X \in \mathrm{IR}^n \,;\, \text{pour } 1 \leq i \leq m,\ V_i \cdot X \leq d_i\}$,
où V et V_i ($1 \leq i \leq m$) sont $m + 1$ vecteurs de IR^n.

Théorème (condition nécessaire et suffisante d'optimalité) :

Un point X^* de A est une solution optimale du problème linéaire si et seulement si il existe m nombres $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$), tels que :

$$V = \Sigma_i\, a_i\, V_i,$$

$$a_i\, (V_i \cdot X_i - d_i) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

ANNEXE 2 – Rappels de théorie des jeux

i) *Jeux non coopératifs (d'après Kreps, 1990)*

On définit dans cette section les concepts de théorie des jeux non coopératifs utilisés. Les quatre premiers points traite les jeux à information parfaite et complète. Le dernier point aborde rapidement les jeux à information imparfaite et incomplète. Le lecteur est averti du fait que ce rappel manque parfois de rigueur, faute de place.

- Jeux sous forme extensive

Définition : on construit un arbre en se donnant un ensemble fini de nœuds de décision, un ensemble fini de joueurs *N* et en spécifiant, pour chaque nœud, quel joueur intervient, de quelles actions il dispose, et quel nœud suit chaque action. Le nœud initial de l'arbre n'a pas de prédécesseur. Les nœuds terminaux de l'arbre sont les nœuds sans successeurs.

La figure ci-dessous montre une partie d'un arbre. Deux nœuds, n et n', sont représentés. Le nœud n est affecté au joueur *i*. Il a le choix entre les actions h et b. S'il joue b, le nœud suivant est n', attribué au joueur *j*, qui choisit entre les actions H et B. Et ainsi de suite…

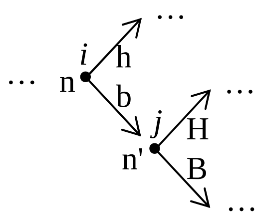

Figure 1. Partie d'un arbre

En principe, un arbre bien construit vérifie un certain nombre de propriétés intuitives : chaque nœud (non initial) a un prédecesseur et un seul ; s'il existe, le chemin d'un nœud à un autre est unique ; il n'y a pas de cycles ; etc.

Définition : un arbre définit un *jeu sous forme extensive* quand il associe à chaque nœud terminal un vecteur des gains des joueurs.

La figure suivante donne un exemple de jeu sous forme extensive. Le nœud initial est marqué d'un cercle vide (c'est la convention habituelle). Il est attribué au joueur 1, qui a le choix entre les actions g et d. S'il joue g, le jeu atteint un nœud terminal et le vecteur des gains est (2, 2) (on lit, dans l'ordre, les gains de 1 et de 2). S'il joue d, le jeu atteint un nœud affecté au joueur 2. Selon son choix, h ou b, le jeu atteint les nœuds terminaux associés aux vecteurs de gains (0, 0) ou (3, 1) respectivement.

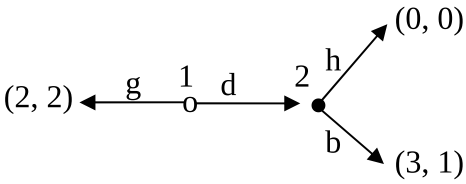

Figure 2. Un jeu sous forme extensive

- Jeux sous forme normale ou stratégique

Définition : on définit un *jeu sous forme normale ou stratégique* en donnant un ensemble fini de joueurs N, un ensemble de stratégies S_i pour chaque joueur $i \in N$ et une fonction d'utilité u_i, défini pour tout profil de stratégies $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

S'il n'y a que deux joueurs, on peut commodément représenter un jeu sous forme normale à l'aide de sa matrice des gains. On en donne un exemple ci-dessous. L'ensemble des joueurs est $N = \{1, 2\}$. Les ensembles de stratégies des joueurs 1 et 2 sont respectivement $S_1 = \{h, b\}$ et $S_2 = \{d, g\}$. Les fonctions d'utilité sont définies implicitement par la matrice des gains (on lit, dans l'ordre, les gains de 1 et de 2) : $u_1(h, d) = 0$, $u_1(h, g) = 1$, $u_1(b, d) = 1$ et $u_1(b, g) = 0$; $u_2(h, d) = 0$, $u_2(h, g) = 1$, $u_2(b, d) = 1$ et $u_2(b, g) = 0$.

		Joueur 2	
		d	g
Joueur 1	h	(0, 0)	(1, 1)
	b	(1, 1)	(0, 0)

Figure 3. La matrice des gains d'un jeu sous forme normale

- Equivalence des deux formes d'un jeu

Tout jeu sous forme extensive peut être récrit sous forme normale, et réciproquement. Lors de ce passage, le concept central est celui de stratégie.

Définition : dans un jeu sous forme extensive, une stratégie d'un joueur est une liste complète d'actions pour tous les nœuds de l'arbre où il intervient.

Prenons l'arbre suivant pour appliquer cette définition. Le joueur 1 intervient en deux nœuds et a, à chaque fois, le choix entre deux actions, à savoir, A et B au premier, et a et b dans le second. Par définition, une stratégie d'un joueur est la donnée d'une action en chaque nœud. Le joueur 1 a donc quatre stratégies possibles : (A, a), (A, b), (B, a) ou (B, b). De son côté, le joueur 2, n'intervenant qu'en un nœud, a deux stratégies possibles, X ou Y.

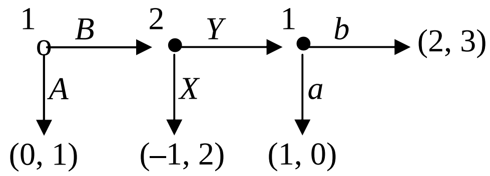

Figure 4. Un jeu sous forme extensive où le joueur 1 joue deux fois

Une fois que l'on a correctement énuméré l'ensemble des stratégies des joueurs, la transcription d'un jeu sous forme extensive en un jeu sous forme normale est immédiate. A chaque profil de stratégies correspond un unique chemin dans l'arbre, conduisant du nœud initial à un nœud terminal. On associe à chaque profil stratégique un unique vecteur de gains, ce qui définit implicitement les fonctions d'utilité du jeu sous forme normale.

Ainsi, pour l'arbre ci-dessus, le jeu sous forme normale associé est représenté par la matrice des gains suivante :

		Joueur 2	
		X	Y
Joueur 1	(A, a)	(0, 1)	(0, 1)
	(A, b)	(0, 1)	(0, 1)
	(B, a)	(–1, 2)	(1, 0)
	(B, b)	(–1, 2)	(2, 3)

Figure 4'. Jeu sous forme normale équivalent

- <u>Concepts de solution d'un jeu non coopératif</u>

Définition : on dit qu'une stratégie d'un joueur est une *stratégie dominante* si, quel que soit le profil des stratégies des autres joueurs, le gain du joueur est maximum en jouant cette stratégie.

Le jeu du dilemme du prisonnier ci-dessous permet d'appliquer cette définition (cf. Chap. V). La stratégie D est une stratégie dominante pour les deux joueurs. En effet, si le joueur 2 joue C, le joueur 1 gagne 3 en jouant D, contre 2 sinon ; si le joueur 2 joue D, il gagne – 2 en jouant D, contre – 3 sinon. Dans tous les cas, il préfère donc jouer D. Il en est de même pour le joueur 2.

		Joueur 2	
		C	D
Joueur 1	C	2, 2	– 3, 3
	D	3, – 3	– 2, – 2

Figure 5. Dilemme du prisonnier

Il semble naturel d'affirmer que, quand elle existe, un joueur joue sa stratégie dominante. Dans cette mesure, on dit que le profil stratégique (D, D) solutionne le jeu du dilemme du prisonnier. Cependant, il est rare qu'un jeu possède un profil de stratégies dominantes. On recourt alors à un autre concept de solution.

Définition : un profil stratégique ($s_1°, s_2°, ..., s_n°$) est un équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale s'il vérifie :

$$u_i(s_1°, s_2°, ..., s_n°) \geq u_i(s_1°, s_2°, ..., s_{i-1}°, s_i, s_{i+1}°, s_n°),$$

pour toute stratégie s_i et tout joueur *i*.

On peut reprendre le jeu de la figure 3 comme exemple d'application. On vérifie que :

- le profil (h, g) est un équilibre de Nash:

$$u_1(\text{h, g}) = 1 > 0 = u_1(\text{b, g}) \text{ et } u_2(\text{h, g}) = 1 > 0 = u_2(\text{h, d}) \text{ ;}$$

- le profil (h, g) est un équilibre de Nash:

$$u_1(\text{b, d}) = 1 > 0 = u_1(\text{h, d}) \text{ et } u_2(\text{b, d}) = 1 > 0 = u_2(\text{b, g}).$$

On peut déterminer un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive en appliquant la définition au jeu sous forme normale associé. Ainsi, considérons l'arbre de la figure 4. Le jeu sous forme normale équivalent est donné par la matrice des gains de la figure 4'. On montre directement que ce jeu admet ((A, a), X) et ((B, b), Y) comme équilibres de Nash.

On admet volontiers qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'un profil stratégique solutionne un jeu est qu'il soit un équilibre de Nash. Il s'ensuit que la question de l'existence dans un jeu d'un équilibre de Nash est essentielle. Nash (1950) établit un théorème d'existence utilisant la notion de stratégie mixte.

Définition : soit $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^k\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur *i*. Une stratégie mixte est une distribution de probabilité sur S_i, i.e. tout vecteur $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_i^k)$ vérifiant $\sigma_i^j \geq 0$, pour $j = 1, 2, \ldots, k$, et $\Sigma_{j=1}^k \sigma_i^j = 1$.

Théorème (Nash, 1950) : tout jeu ayant un nombre fini de joueurs et de stratégies admet un équilibre de Nash en stratégie pure ou mixte.

Dans les jeux sous forme extensive, le critère d'équilibre de Nash définit parfois une solution peu satisfaisante du jeu. Ceci tient au fait qu'un équilibre de Nash peut être stabilisé par des actions en dehors du chemin d'équilibre peu vraisemblables. L'extension suivante de l'équilibre de Nash pour les jeux sous forme extensive pallie ce défaut.

Définition : on appelle sous-jeu d'un jeu sous forme extensive tout jeu obtenu en prenant comme nœud initial un nœud non terminal quelconque de l'arbre initial. Un équilibre parfait en sous-jeux est un équilibre de Nash en chaque sous-jeu.

En appliquant ce critère au jeu sous forme extensive de la figure 4, on élimine l'équilibre de Nash ((A, a), X) et on garde l'équilibre de Nash ((B, b), Y), qui est aussi parfait en sous-jeux.

- Modéliser l'information

Dans un arbre, l'information disponible est représentée par une partition de l'ensemble des nœuds. Les classes de cette partition sont appelées des ensembles d'information. Par hypothèse, les joueurs confondent les nœuds contenus dans un même ensemble d'information. Ce formalisme permet de considérer aussi bien des situations dites d'information imparfaite que d'information incomplète. Un jeu est dit à information imparfaite lorsqu'un joueur au moins n'observe pas certains coups précédents des autres joueurs. Un jeu est dit à information incomplète lorsqu'un joueur au moins n'observe pas certaines caractéristiques des autres joueurs. La différence formelle entre ces deux notions n'est pas très significative.

La figure ci-dessous donne un exemple de jeu avec information imparfaite. Graphiquement, on relie les nœuds d'un même ensemble d'information par un trait en pointillé (cette convention est habituelle). Dans cet exemple, le joueur 1 intervient au nœud initial. Comme le nœud initial n'est relié à aucun autre, il forme à lui seul un ensemble d'information. Ceci implique que le joueur 1 dispose d'une information parfaite pour jouer ses stratégies G ou D. Par contre, l'ensemble d'information suivant, attribué au joueur 2, contient deux nœuds. Ceci signifie que le joueur 2 confond ces deux nœuds et, donc, qu'il ignore le coup précédent du joueur 1.

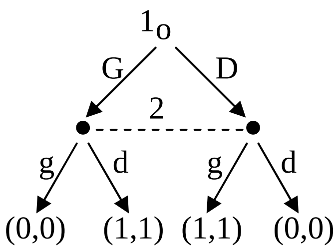

Figure 6. Jeu sous forme extensive avec information imparfaite

Harsanyi (1967-68) recourt à une astuce pour adapter cette modélisation à l'information incomplète. Il modifie le jeu initial et introduit un joueur fictif, appelé Nature, dont le rôle se borne à choisir les caractéristiques des joueurs, par tirage aléatoire, suivant une distribution de probabilité donnée. L'information incomplète découle alors d'une partition sur l'ensemble des nœuds issus du coup joué par Nature.

Pour exemple, considèrons l'arbre suivant. La Nature intervient au nœud initial. Elle joue a avec la probabilité 1/2, b avec la probabilité complémentaire 1/2 (les probabilités sont conventionnellement mises entre accolades). Les deux successeurs du nœud initial appartiennent à deux ensembles d'information distincts du joueur 1, ce qui signifie qu'il observe le choix de la Nature. Par contre, les successeurs des nœuds du joueur 1, pour les cas où il joue d ou D (sinon le jeu s'arrête), appartiennent à un même ensemble d'information du joueur 2, ce qui signifie qu'il ignore le choix de la Nature. Cette différence dans la répartition de l'information entre les joueurs caractérise un jeu à information incomplète.

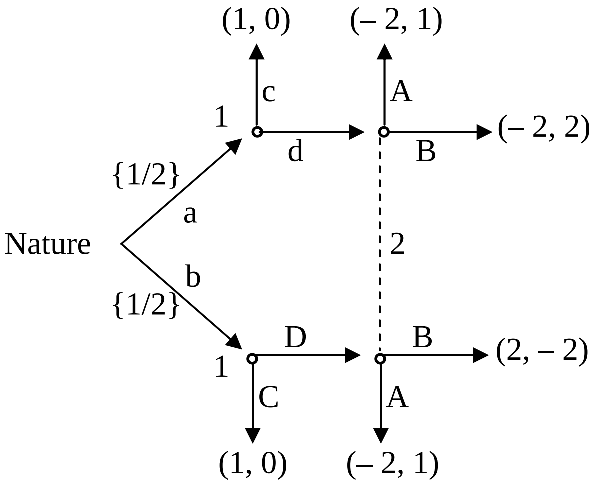

Figure 7. Jeu sous forme extensive avec information incomplète

Les *jeux bayésiens* sont un cas particulier des jeux à information incomplète, où les joueurs jouent **simultanément** après que la Nature a choisi leurs caractéristiques. Dans un tel jeu, le fait que les joueurs n'obvervent pas les choix des autres avant de jouer eux-mêmes simplifie considérablement la recherche d'une solution du jeu. On utilise alors le concept d'équilibre bayésien, qui est une adaption de l'équilibre de Nash.

Définition : un jeu bayésien est la donnée d'un ensemble de joueurs N, d'un ensemble de caractéristiques T_i pour chaque joueur, d'une distribution de probabilité *a priori* q sur l'espace des caractéristiques $T = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n$ et, pour chaque joueur, d'un ensemble d'actions A_i et d'une fonction d'utilité u_i, définie pour tout profil d'actions $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et tout profil de caractéristiques $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$.

Dans un jeu bayésien, une stratégie d'un joueur i est une fonction s_i, associant une action à chacune de ses caractéristiques : $s_i(t_i) = a_i$ est l'action jouée par i s'il a le type t_i. Soit S_i l'ensemble de ces fonctions. Pour un profil de stratégies $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ donnés, l'espérance d'utilité du joueur i s'écrit $\underline{u}_i(s) = \Sigma_{t \in T}\, q(t)\, u_i(s(t), t)$, en notant $s(t) = (s_1(t_1), s_2(t_2), \ldots, s_n(t_n))$ le profil des actions jouées par les joueurs, sachant s et t.

Définition : un équilibre bayésien du jeu bayésien ci-dessus est un équilibre de Nash du jeu sous forme normale déduit, défini par l'ensemble des joueurs N, l'ensemble des stratégies S_i et les fonctions d'utilité $\underline{u}_i$.

ii) *Jeux coopératifs (d'après Shubik, 1984)*

On ne traite ci-dessous que le cas des jeux coopératifs avec paiements latéraux (dits aussi à utilité transférable).

- Jeu sous forme caractéristique

Définition : on définit un jeu sous forme caractéristique en donnant un ensemble de joueurs N, en donnant associant nombre $v(S)$ à tout sous-ensemble S de joueurs et en posant que les joueurs de S peuvent obtenir tout profil d'utilité (u_i, $i \in S$) vérifiant $\Sigma_{i \in S}\ u_i \leq v(S)$. Le sous-ensemble S est appelé coalition. Le nombre $v(S)$ est appelé la valeur de la coalition S. Il est égal à l'utilité maximale que les joueurs de S peuvent obtenir en décidant une stratégie en commun.

- Concepts de solution d'un jeu coopératif

Définition : un profil d'utilité ($u_i°$, $i \in N$) est une solution du jeu coopératif s'il est possible pour la grande coalition N, c'est-à-dire si $\Sigma_{i \in N}\ u_i° \leq v(N)$, et si aucune coalition S **faisable** n'est en mesure de distribuer à tous ses membres une utilité au moins grande et à un d'entre eux au moins une utilité strictement supérieure, c'est-à-dire si $\Sigma_{i \in N}\ u_i° \geq v(S)$ pour toute coalition S faisable.

On utilise dans le chapitre V deux cas particuliers de cette définition.

Si seules les coalitions singletons et la grande coalition sont faisables, les distributions retenues sont appelées des imputations. Une imputation ($u_i°$, $i \in N$) vérifie :

- elle est possible pour N : $\Sigma_{i \in N}\ u_i° \leq v(N)$,
- elle est individuellement rationnelle : $u_i° \geq v(\{i\})$ pour tout $i \in N$,
- elle est optimale au sens de Pareto : quelle que soit la distribution $(u_i)_{i \in N}$ telle que $u_i \geq u_i°$ pour tout $i \in N$ avec l'inégalité stricte pour au moins un individu, on a $\Sigma_{i \in N}\ u_i > v(N)$.

Si toutes les coalitions $S \subseteq N$ sont possibles, l'ensemble des distributions retenues s'appelle le *cœur* du jeu. Formellement, une distribution $(u_i°)_{i \in N}$ appartient au cœur du jeu coopératif si :

- elle est possible pour N : $\Sigma_{i \in N}\ u_i° \leq v(N)$,
- elle est rationnelle pour tout groupe : $\Sigma_{i \in S}\ u_i° \geq v(S)$ pour tout $S \subseteq N$.